

高二数学精练题集

目录

第 1 讲	向量的运算及其坐标表示.....	2
第 2 讲	向量的数量积、平面向量的分解定理.....	4
第 3 讲	向量的运用及向量的综合.....	6
第 4 讲	直线的方程、直线的倾斜角和斜率.....	7
第 5 讲	两条直线的位置关系、点到直线的距离.....	9
第 6 讲	直线的综合.....	11
第 7 讲	曲线与方程.....	13
第 8 讲	圆的方程.....	15
第 9 讲	椭圆的标准方程和性质.....	17
第 10 讲	直线与椭圆的位置关系.....	19
第 11 讲	双曲线的标准方程和性质.....	21
第 12 讲	抛物线的标准方程和性质.....	23

第 1 讲 向量的运算及其坐标表示

【典例精析】

例 1. 若 O 是 $\triangle ABC$ 内一点, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, 求证: O 是 $\triangle ABC$ 的重心。

例 2. 向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 有公共起点 O , 且满足 $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} (\lambda, \mu \in R)$, 证明: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 三个向量的终点 A, B, C 在一条直线上的充要条件是 $\lambda + \mu = 1$ 。

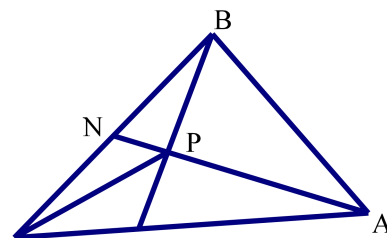
例 3. 设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是任意非零平面向量, 且 $\vec{a}, \vec{b}$ 不平行, 如果 x_1, x_2 是方程 $\vec{a}x^2 + \vec{b}x + \vec{c} = \vec{0} (x \in R)$ 的两个实数根, 证明: $x_1 = x_2$ 。

例 4. 直线经过 $\triangle ABO$ 的重心 G , 分别交边 OA, OB 于点 P, Q , 若 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OQ} = y\overrightarrow{OB} (x, y \neq 0)$, 求证: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$ 。

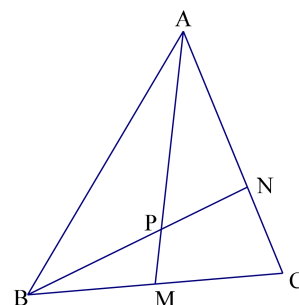
例 5. 已知 $\triangle OAB$ ，其中 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ， M, N 分别是边 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 上的点，且

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\vec{a}, \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\vec{b}, \text{ 设 } \overline{AN} \text{ 与 } \overline{BM} \text{ 相交于 } P, \text{ 用向量 } \vec{a}、\vec{b} \text{ 表示 } \overrightarrow{OP}$$

例 6. 已知点 P 分向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 所成的比为 -5 ， $\overrightarrow{OP_1} = 2\vec{a} - \vec{b}$ ， $\overrightarrow{OP_2} = \vec{a} + \vec{b}$ ，其中 $\vec{a}, \vec{b}$ 为不平行的向量，若将 $\overrightarrow{OP}$ 写成 $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ 的形式，求实数 λ 和 μ 的值。



例 7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知点 M 是 BC 的中点，点 N 在边 AC 上，且 $AN = 2NC$ ， AM 与 BN 相交于点 P ，求 $AP:PM$ 的值。



例 8. 平面内给定三个向量 $\vec{a} = (3, 2)$ ， $\vec{b} = (-1, 2)$ ， $\vec{c} = (4, 1)$

- (1) 求 $3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$ ；
- (2) 求满足 $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$ 的实数 $m、n$ ；
- (3) 设 $\vec{d} = (x, y)$ 满足 $(\vec{d} - \vec{c}) \parallel (\vec{a} + \vec{b})$ ，且 $|\vec{d} - \vec{c}| = 1$ ，求 $\vec{d}$ 。

第2讲 向量的数量积、平面向量的分解定理

【典例精析】

一、向量的数量积

例1 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB}=(2,3)$, $\overrightarrow{AC}=(1,k)$, 且 $\triangle ABC$ 的一个内角为直角, 求 k 值

例2 已知 $\vec{a}=(2,-1)$, $\vec{b}=(m,m-1)$, 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为锐角, 求实数 m 的取值范围。

例3 (1) 已知 $\vec{a}=(2,4)$, $\vec{b}=(1,1)$, 若 $\vec{b} \perp (\vec{a} + \lambda\vec{b})$, 则实数 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 若 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, 且 $\vec{c} \perp \vec{a}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

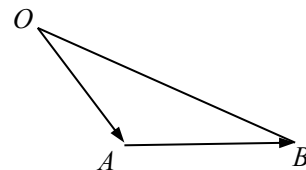
例4 设 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, 且 $|k\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}|\vec{a} - k\vec{b}|$ ($k > 0$).

(1) 用 k 表示 $\vec{a} \cdot \vec{b}$; (2) 求证: $\vec{a}$, $\vec{b}$ 不可能垂直; (3) 当 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 最小值, 求 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角.

例5. 如图, 已知 $\triangle OAB$ 的面积为 S , 且 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = 2$,

(1) 若 $1 < S < \sqrt{3}$, 求向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角 θ 的取值范围;

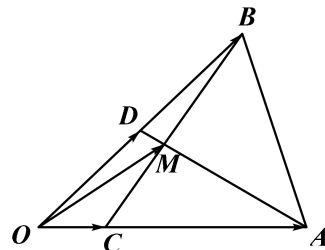
(2) 若 $\theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$, 求 $\triangle OAB$ 的最大边长的最小值。



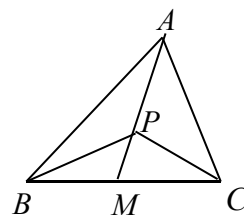
二、平面向量分解定理

例 6 如图, 在 $\triangle ABO$ 中, $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, AD 与 BC 相交于点 M , 设 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$,

$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. 试用 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{OM}$.

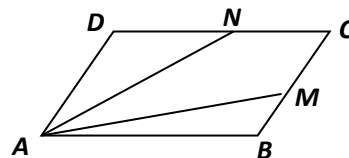


例 7 在 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点, $AM = 2$, 点 P 在 AM 上, 求 $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最小值.



例 8 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = \frac{\pi}{3}$, 边 AB, AD 的长分别为 2、1. 若 M, N

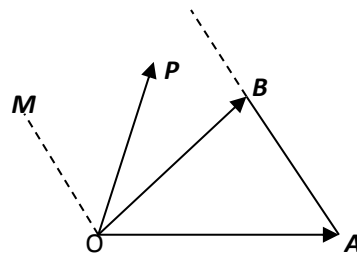
分别是边 BC, CD 上的点, 且满足 $\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{|\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{CD}|}$, 求 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的取值范围.



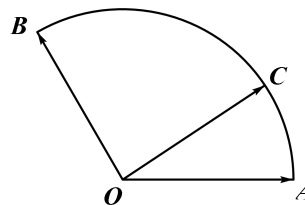
例 9 如图, $OM \parallel AB$, 点 P 在由射线 OM , 线段 OB 及 AB 的延长线围成的区域内 (不含边

界) 运动, 且 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$.

(1) 求 x 的取值范围; (2) 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 求 y 的取值范围.



例 10 如图, 两个单位向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 的夹角为 120° , 点 C 在以 O 为圆心的圆弧 $\overline{AB}$ 上变动. 若 $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, $x, y \in \mathbb{R}$, 求 $x + y$ 的最大值.



第3讲 向量的运用及向量的综合

【典例精析】

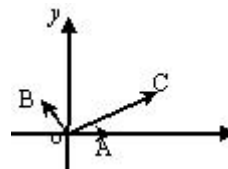
一、几何应用

例1. 求等腰直角三角形中两直角边上的中线所成的钝角的度数。

例2. 已知 $\triangle ABC$, AD 为中线, 求证 $AD^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2) - \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

例3. 如图, $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = 1$, $\vec{OA}$ 与 $\vec{OB}$ 的夹角为 120° , $\vec{OC}$ 与 $\vec{OA}$ 的夹角为 30° , $|\vec{OC}| = 5$,

用 $\vec{OA}, \vec{OB}$ 表示 $\vec{OC}$.



二、代数应用

例4. 在直角坐标平面中, 已知点 $P_1(1,2), P_2(2,2^2), P_3(3,2^3), \dots, P_n(n,2^n)$, 其中 n 是正整数, 对平面上任一点 A_0 , 记 A_1 为 A_0 关于点 P_1 的对称点, A_2 为 A_1 关于点 P_2 的对称点, $\dots$, A_n 为 A_{n-1} 关于点 P_n 的对称点.

(1) 求向量 $\vec{A_0A_2}$ 的坐标; (2) 对任意偶数 n , 用 n 表示向量 $\vec{A_0A_n}$ 的坐标.

例5. 设 x 轴、 y 轴正方向上的单位向量分别是 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$, 坐标平面上点 $A_n, B_n (n \in \mathbb{N}^*)$ 分

别满足下列两个条件: ① $\vec{OA_1} = \vec{j}$ 且 $\vec{A_nA_{n+1}} = \vec{i} + \vec{j}$; ② $\vec{OB_1} = 3\vec{i}$ 且 $\vec{B_nB_{n+1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times 3\vec{i}$.

(1) 求 $\vec{OA_n}$ 及 $\vec{OB_n}$ 的坐标;

(2) 若四边形 $A_nB_nB_{n+1}A_{n+1}$ 的面积是 a_n , 求 $a_n (n \in \mathbb{N}^*)$ 的表达式;

(3) 对于 (II) 中的 a_n , 是否存在最小的自然数 M , 对一切 $(n \in \mathbb{N}^*)$ 都有 $a_n < M$ 成

立? 若存在, 求 M ; 若不存在, 说明理由.

第4讲 直线的方程、直线的倾斜角和斜率

【典例精析】

例1、已知直线 l 过点 $A(1,2)$ ，它的一个方向向量为 $\vec{d}=(2,3)$ ，直线 l' 过点 $B(3,3)$ ，试分别求满足下列条件的直线 l' 的方程（不要求化成一般式）

- (1) 直线 l' 与直线 l 垂直；
- (2) 直线 l' 与直线 l 平行；
- (3) 直线 l' 的倾斜角比直线 l 的倾斜角大 $\frac{\pi}{4}$ ；
- (4) 点 $A(1,2)$ 到直线 l' 的距离最大.

例2、已知直角坐标平面内三点 $A(m,1), B(2m,4), C(4,10)$ 共线，求实数 m 的值.

例3、(1) 求直线 $x - y \cdot \cos \alpha + 1 = 0 (\alpha \in R)$ 的倾斜角 θ 的取值范围；

(2) 求直线 $x + \cos \theta \cdot y + 1 = 0, \theta \in [0, \pi]$ 的斜率和倾斜角.

例4、已知直线经过点 $P(1,2)$ ，且分别与 x, y 轴的正半轴交于 A, B 两点，求：

- (1) $|OA| + |OB|$ 的最小值；
- (2) $|AP| \cdot |BP|$ 的最小值.

例 5、已知直线的斜率为 $\frac{1}{2}$ ，且与坐标轴围成的三角形面积为 5，求直线的方程.

例 6、若矩形 $ABCD$ 的边 AB 所在直线方程为 $3x + 4y - 8 = 0$ ，顶点 B 的坐标为 $(0, 2)$ ，点

D 的坐标为 $(5, \frac{9}{2})$ ，求：

- (1) 边 CD 、 BC 所在的直线方程；
- (2) 对角线 AC 所在的直线方程.

例 7、已知点 P 是直线 $3x - y = 0$ 上位于第一象限的点， $M(3, 2)$ 为一定点，直线 PM 交 x 轴于点 Q ，求 ΔPOQ 面积的最小值及此时的直线 PQ 的方程.

第 5 讲 两条直线的位置关系、点到直线的距离

【典例精析】

例 1、求直线 $4x + y - 1 = 0$ 关于点 $M(2, 3)$ 对称的直线方程.

例 2、已知直线 l 经过坐标原点，当三点 $A(1, 2)$ ， $B(3, 1)$ ， $C(2, 3)$ 到直线 l 的距离的平方和最大时，求直线 l 的方程.

例 3、若平行四边形 $OABC$ 的三个顶点坐标为 $O(0, 0)$ 、 $A(3, 1)$ 、 $C(-1, 3)$

(1) 求 B 点的坐标；

(2) 若与 x 轴的夹角为 30° 的一条直线把平行四边形 $OABC$ 的面积分为相等的两部分，求直线 l 的方程.

例 4、求过点 $(1, -3)$ 且与直线 $2x - 13y + 8 = 0$ 平行的直线方程.

例 5、求过点 $(11, -5)$ 且与直线 $4x - 3y - 17 = 0$ 垂直的直线方程.

例 6、求两条直线 $x + \sqrt{3}y - 5 = 0$ 与 $3x + 1 = 0$ 之间的夹角.

例 7、在 $\triangle ABC$ 中, $A(-1, 5)$, $B(0, -1)$, $\angle C$ 平分线所在直线方程为 $x + y - 2 = 0$, 求 AC 所在直线方程.

例 8、两条平行线分别过点 $A(1, 0)$, $B(0, 5)$ 且距离为 5, 求两条直线的方程.

例 9、已知直线 $3x - 4y + 5 = 0$ 与 l 关于直线 $x + y = 0$ 对称, 求 l 的方程.

例 10、当 a 为何值时, 三条直线 $l_1: x - y + 1 = 0$, $l_2: ax + y - 2 = 0$, $l_3: x + 2ay + 2a = 0$ 能构成三角形?

第 6 讲 直线的综合

【典例精析】

例 1、已知直线 $l_1: y = kx + 2k + 1$ 与 $l_2: y = -\frac{1}{2}x + 2$ 的交点在第一象限，求实数 k 的取值范围.

例 2、(1) 求点 (a, a^2) 到直线 $l: 2x - y - 2 = 0$ 距离的最小值；

(2) 若点 (a, a^2) 与原点在直线 $l: x - y + 2 = 0$ 的同侧，求 a 的取值范围.

例 3、求与点 $P(4, 1)$ 关于直线 $l: 3x - 2y + 3 = 0$ 对称的点 Q 的坐标.

例 4、求与已知直线 $l_1: 2x + 3y - 6 = 0$ 关于点 $P(1, -1)$ 对称的直线 l_2 的方程.

例 5、已知直线 $l_1: y = \frac{x}{2} - 1$ 与直线 l_2 关于直线 $l: y = 2x - 4$ 对称，求直线 l_2 的方程.

例 6、已知过定点 $P(2, 4)$ 的两条互相垂直的直线 l_1 与 l_2 ， l_1 与 y 轴正半轴交于点 A ， l_2 与 x 轴正半轴交于点 B ，试用解析式将这两条直线及两坐标轴正半轴围成的四边形的面积 S 表示成直线 l_1 的斜率 k 的函数.

例 7、在直角坐标平面中，已知 $A(1, 2)$ ， $B(a+2, a+2)$ ， $C(a, 2a)$ 三点，试判断是否存在分别满足下列条件的实数 a . 若存在，则求出 a ；若不存在，则说明其理由.

- (1) A, B, C 三点共线；
- (2) A, B, C 三点在直线 $l: x - 2y - 2 = 0$ 的同侧，且三角形 ABC 的面积为 5；
- (3) A, B, C 三点在直线 $l: x - 2y - 2 = 0$ 的同侧，且三角形 ABC 的面积最大.

第7讲 曲线与方程

典例精析：

1. 若曲线 $x^2 - y^2 + 2x - 3y + 4a^2 + 6a = 0$ 经过原点，则实数 a 的值是_____
2. 已知曲线 L 的方程是 $(2x - y + 1)\sqrt{x - 3y} = 0$ ，在以下四个点 $O(0, 0), A(0, 1), B(-2, -3), C(1.5, -4)$ 中，位于曲线上的点是_____
3. 给出以下命题：
 - (1) 以点 $A(3, 0), B(0, 4)$ 为端点的线段 AB 的方程是 $4x + 3y - 12 = 0$ ($x \geq 0$)
 - (2) 到 x 轴， y 轴距离之比等于 2 的动点的轨迹方程是 $y = 2x$
 - (3) 方程 $x = \sqrt{1 - y^2}$ 的曲线是以原点为圆心，1 为半径的圆
 - (4) 与两坐标轴都相切的圆的圆心轨迹方程是 $x^2 - y^2 = 0$
 其中错误命题的序号是_____
4. 设点 $A(2, -1)$ ，若动点 P 的轨迹方程是 $f(x, y) = 0$ ，则线段 AP 中点 Q 的轨迹方程是_____
5. 设定点 $M(-1, 2), N(5, 2)$ ，动点为 P ，(1) 若 $|PM| + |PN| = 6$ ，则动点 P 的轨迹方程是_____

(2) 若 $|PM| - |PN| = 6$ ，则动点 P 的轨迹方程是_____
6. 已知：“曲线 C 上的点的坐标都满足方程 $F(x, y) = 0$ ”是真命题，则下列命题中，
 - (1) 不是曲线 C 上的点的坐标一定不满足方程 $F(x, y) = 0$
 - (2) 坐标满足方程 $F(x, y) = 0$ 的点都在曲线 C 上
 - (3) 曲线 C 是方程 $F(x, y) = 0$ 的曲线
 - (4) 方程 $F(x, y) = 0$ 的曲线不一定是曲线 C
 其中真命题是_____

7. 直线 $y = x + \frac{3}{2}$ 被曲线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 截得的弦长为 _____

8. 设点 $P(x, y)$ 满足 $1 \leq x \leq 4, -6 \leq y \leq -2$, 则直线 OP 的斜率 k 的取值范围是 _____ (O 是原点)

9. 求适合下列条件的动点的轨迹方程:

- (1) 定长为6的线段的两个端点 A, B 分别在 x 轴, y 轴上移动, 求线段 AB 中点的轨迹方程
- (2) 动点 P 在 x 轴上方, 且它到直线 $x+y-1=0$ 的距离的平方等于它到 y 轴的距离, 求 P 点的轨迹方程。

10. 在坐标系中, 动点 $P(x, y), Q(u, v)$ 的坐标满足
$$\begin{cases} ux - vy = y - v \\ vx + uy = -x + u \end{cases}$$

- (1) 当点 P 在除去点 $(0, 1)$ 的 y 轴上运动时, 作出点 Q 所描出的图形
- (2) 当点 P 在 x 轴上运动时, 作出点 Q 所描出的图形。

第 8 讲 圆的方程

1. 求以 $A(-1, 2), B(5, -6)$ 为直径两端点的圆的方程.

2. 过点 $A(2, -3)$, 圆心在直线 $x + 2y = 0$ 上的圆, 被直线 $x - y - 1 = 0$ 截得的弦长为 $2\sqrt{2}$, 求圆的方程.

3. 求以原点为圆心, 截直线 $3x + 4y + 15 = 0$ 所得弦长为 8 的圆的方程.

4. 求与 y 轴相切, 经过原点和点 $(3, 6)$ 的圆的方程.

5.斜率为 2 的直线 l 被圆 $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ 所截得的线段长为 $2\sqrt{2}$ ，求直线 l 的方程.

6.圆 $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$ 内一点 $A(3,0)$ ，求过 A 的最短的弦所在直线方程.

7.已知圆 $x^2 + y^2 - x - 6y + c = 0$ 和直线 $x + 2y - 3 = 0$ 交于 P、Q 两点，O 为原点，若 $OP \perp OQ$ ，求 c 的值.

8.求过点 $B(5,-3)$ ，而于圆 $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 8$ 相切的切线方程.

第 9 讲 椭圆的标准方程和性质

1. 求椭圆的标准方程

(1) 已知椭圆经过两点 $A(1, -2\sqrt{2})$, $B(-\sqrt{3}, -\sqrt{2})$, 求椭圆的标准方程.

(2) 求经过点 $(2, 3)$, 且与椭圆 $9x^2 + 4y^2 = 36$ 有共同焦点的椭圆的标准方程.

2. 求轨迹方程

(1) 点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上的动点, O 为坐标原点, 点 Q 在线段 OP 上, 且 Q 分 $\overrightarrow{OP}$ 所成比等于 2, 求点 Q 的轨迹方程.

(2) 已知圆 $x^2 + y^2 - 6x - 55 = 0$, 动圆 M 经过定点 $A(-3, 0)$, 且与已知圆相内切, 求圆心 M 的轨迹方程.

3.焦点三角形

(1)在椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上是否存在点 P, 使 P 与椭圆的两个焦点的连线垂直, 若存在求出点

P 的坐标, 若不存在说明理由.

(2)已知椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的两焦点 F_1, F_2 在 x 轴上, P 为椭圆上任意一点, 且 $\angle F_1 P F_2$

的最大值为 $\frac{\pi}{3}$, 求 b 的值.

(3)已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1, F_1, F_2$ 是它的两个焦点, 若 P 是椭圆上任一点, 求 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2$

的最小值.

4.直线与椭圆

(1)若直线 $y = kx + 2$ 和椭圆 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 相交于两个不同的点, 求实数 k 的取值范围.

(2)过椭圆内 $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$ 内一点 $M(4, -1)$ 引弦 AB, 使 AB 被 M 平分, 求直线 AB 的方程.

第 10 讲 直线与椭圆的位置关系

1. 过椭圆 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 的一个焦点，且倾角为 $\frac{\pi}{6}$ 的直线交椭圆于 M、N 两点，求 |MN| 的长.
2. 设直线 $l: 2x - y = b$ 和椭圆 $C: \frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{25} = 1$ ，当 b 为何取值范围时，直线和椭圆有两个公共点，并求出直线被椭圆截得的弦长.
3. 已知直线 $l: y = x + t$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 交于 A、B 两点，求 $S_{\triangle AOB}$ 的最大值.
4. 已知直线 $y = x + 1$ 交椭圆 $ax^2 + by^2 = 1 (a, b > 0)$ 于 P、Q 两点，满足 $|PQ| = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ， $OP \perp OQ$ ，求椭圆方程.

5. 已知直线 l 与椭圆 $4x^2 + 9y^2 = 36$ 相交于 A、B 两点，弦 AB 的中点坐标为 M(1,1)，求直线 l 的方程.

6. 已知椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 和直线 $y = 2x + m$ 恒有两个不同的交点 A、B，求 AB 连线段中点 M 的轨迹方程.

7. 过点 P(8,1) 引椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的割线交椭圆于 P、Q 两点，求弦 PQ 的中点 M 的轨迹方程.

8. 若椭圆 $ax^2 + by^2 = 1 (a, b > 0)$ 与直线 $x + y = 1$ 交于 A、B 两点，M 为 AB 的中点，直线 OM 的斜率为 2，且 $OA \perp OB$ ，求椭圆方程.

第 11 讲 双曲线的标准方程和性质

I 双曲线的标准方程

1. 已知双曲线 C 的中心在坐标原点，它的焦距为 $4\sqrt{13}$ ，一条渐近线方程为 $2x - 3y = 0$ ，求此双曲线的方程.

2. 求以双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的渐近线为渐近线，过点 $A(-6\sqrt{3}, -12)$ 的双曲线方程.

3. 求以实轴长为 6，焦距为 10 的双曲线的标准方程.

4. 实轴长为 12，一条渐近线为 $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 0$ 的双曲线的标准方程.

5. 双曲线 C 与椭圆 $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1$ 有共同的焦点，它们的交点中有一个交点的纵坐标为 4，求双曲线的方程.

6. 中心为原点的双曲线 C 经过点 $A(-2\sqrt{7}, 3), B(7, 6\sqrt{2})$ ，求该双曲线的方程，并指出渐近线的夹角.

II 双曲线与直线

1. 双曲线 $x^2 - 4y^2 = 4$ 的弦 AB 被点 M(3, -1) 平分, 求直线 AB 的方程.

2. 已知双曲线 $2x^2 - 3y^2 = 6$, 若它的一条弦 AB 被直线 $y = 4x$ 平分, 求弦 AB 的斜率.

3. 求过定点 (0, 1) 的直线被双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 截得的弦中点轨迹方程.

4. 直线 $y = kx + 1$ 与双曲线 $3x^2 - y^2 = 1$ 相交于两点 A、B, 当 k 为何值时, 以 AB 为直径的圆经过坐标原点.

5. 垂直于直线 $x + 2y - 3 = 0$ 的直线 l 被双曲线 $C: \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ 截得的弦长为 $\frac{4\sqrt{5}}{3}$, 求直线 l 的方程.

6. 已知直线 $l_1: y = kx - 1$ 与双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的左支交于 A、B 两点

(1) 求斜率 k 的取值范围;

(2) 若直线 l_2 经过点 P(-2, 0) 和线段 AB 的中点 Q, 且 l_2 在 y 轴上的截距为 -16, 求直线 l_1 的方程.

第 12 讲 抛物线的标准方程和性质

I 抛物线的标准方程

1. 求以原点为顶点，坐标轴为对称轴，且焦点在直线 $y = 2x - 4$ 上的抛物线方程.
2. 过抛物线 $x^2 = ay$ 的焦点 F 作 y 轴的垂线，交抛物线与 A、B 两点，若 $|AB| = 6$ ，求抛物线的方程.
3. 已知抛物线 C 的顶点为双曲线 $S: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的中心，抛物线 C 的焦点为双曲线 S 的焦点，求抛物线 C 的方程.
4. 若抛物线 $y^2 = 2px$ 上横坐标为 4 的点到焦点的距离为 5，求则此抛物线的方程.
5. 若抛物线 $y^2 = 16x$ 上一点 M 到 x 轴的距离等于 12，求点 M 到抛物线的焦点距离.
6. 已知抛物线 C 的顶点在原点，它的准线 l 经过双曲线 $S: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的焦点，且准线 l 与双曲线 S 交于 P(2,3) 和 Q(2,-3) 两点，求抛物线 C 和双曲线 S 的方程.

II 抛物线与直线

7.过点 $A(2,1)$ 作抛物线 $y^2 = 4x$ 的弦 MN ，而 A 恰为 MN 的中点，求 MN 所在的直线的方程.

8.抛物线 $y = 2x^2$ 上两点 A 、 B ， O 为坐标原点，且 $OA \perp OB$ ，求 $\triangle OAB$ 面积的最小值.

9.过直角坐标平面 xOy 中的抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 作一条倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线，与抛物线相交于 A 、 B 两点，

(1)用 p 表示 A 、 B 之间的距离；

(2)证明 $\angle AOB$ 的大小是与 p 无关的定值，并求出这个定值.

10.已知抛物线 $y^2 = 2px$ 与圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 仅有 1 个公共点，求 p 的取值的范围.

11.求与抛物线 $y^2 = 8x$ 只有 1 个交点，并且经过点 $M(2,4)$ 的直线方程.

12.若抛物线 $y^2 = 2x$ 上存在两点关于直线 $y = x + b$ 对称，求实数 b 的取值范围.

III 抛物线的焦点弦

*13.过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 作弦 AB, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 且 AB 与抛物线对称轴的夹角为 α , 求证

$$(1) x_1 x_2 = \frac{p^2}{4}, y_1 y_2 = -p^2;$$

$$(2) \frac{1}{|FA|} + \frac{1}{|FB|} = \frac{2}{p};$$

$$(3) |AB| = x_1 + x_2 + p;$$

$$(4) |AB| = \frac{2p}{\sin^2 \alpha}.$$

14.经过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 作倾角为 $\frac{\pi}{3}$ 的弦 AB, 求 AB 的长.

15.已知过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点作直线交抛物线于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点, 若 $x_1 + x_2 = 4p$, 求|AB|的长.

16.过抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点, 且斜率为 1 的直线交抛物线于 A、B 两点, 若 $|AB| = 8$, 求抛物线的方程.