

2017 春季班高一数学精炼题集参考答案

第一讲 任意角及其度量

【知识要点】

一、任意角

1. 角：一条射线绕着它的端点从初始位置（始边）旋转到终止位置（终边）所形成的图形。

（1）正角：一条射线绕端点按逆时针方向旋转所形成的角为正角；

（2）负角：一条射线绕端点按顺时针方向旋转所形成的角为负角；

（3）零角：一条射线没有旋转时形成的角为零角。

2. 用运动的观点来定义角的概念，角可看作是由一条射线绕着它的端点从初始位置（始边）旋转到最终位置（终边）所形成的。逆时针旋转得到正角，顺时针旋转得到负角，没有旋转得到零角。

将角的顶点与坐标原点重合，角的始边与 x 轴的正半轴重合，角的终边在第几象限，就称这个角是第几象限的角。要注意的是，当角的终边在坐标轴上时，这个角不属于任何象限。

3. 与角 α 终边相同的角表示为 $\{\beta | \beta = k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in \mathbb{Z}\}$ 。

二、弧度制

1. 将长度等于半径的圆弧所对圆心角的大小叫做 1 弧度的角，记为 1rad ，通常省略单位 rad ，用弧度来度量角的大小是角的另一种度量制度——弧度制。弧度制与角度制之间存在着下列换算关系： $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ 弧度， $1 \text{ 弧度} = (\frac{180}{\pi})^\circ \approx 57.3^\circ$ 。学习时须了解为什么要引入弧度制？角的大小能用实数表示，为以后学习自变量为角的函数提供基础。因此目前要对一些常用的特殊角的弧度数相当熟悉。

2. 扇形弧长公式 $l = |\alpha| \cdot r$ ； 扇形面积公式 $S = \frac{1}{2} l \cdot r = \frac{1}{2} |\alpha| \cdot r^2$

两个公式的记忆法：取 $\alpha = 2\pi$ ，可检验与圆周长、圆面积公式是否一致。

3. 一个角确定了，它的终边也就唯一确定了；但反过来，若角的终边确定了，则它表示的角并不确定，这样的角有无数个，它们之间大小相差 2π 的整数倍。即与角 α 终边相同的角的集合表示为 $\{x | x = 2k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}\}$ （或 $\{x | x = 360^\circ \cdot k + \alpha, k \in \mathbb{Z}\}$ ）。注意：在同一个表达式中弧度与角度不能混用。

4. 终边在各坐标轴上的角的表示:

角 α 终边在 x 轴正方向: $2k\pi (k \in \mathbb{Z})$;

角 α 终边在 x 轴负方向: $2k\pi + \pi (k \in \mathbb{Z})$;

角 α 终边在 y 轴正方向: $2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$;

角 α 终边在 y 轴负方向: $2k\pi + \frac{3}{2}\pi (k \in \mathbb{Z})$ 或 $2k\pi - \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

5. 象限角的范围:

第一象限角的范围: $\left(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$;

第二象限角的范围: $\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \pi\right), k \in \mathbb{Z}$;

第三象限角的范围: $\left(2k\pi + \pi, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$;

第四象限角的范围: $\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}, 2k\pi + 2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ 或 $\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

【典型例题】

一、任意角

例 1 经过 40 分钟, 求时针、分针、秒针各转过的角度.

解 时针转过的角度为 $-360 \times \frac{1}{12} \times \frac{40}{60} = -2^\circ$;

分针转过的角度为 $-360^\circ \times \frac{40}{60} = -240^\circ$;

秒针转过的角度为 $-360^\circ \times 40 = -14400^\circ$.

例 2 在 $[0, 360^\circ)$ 内, 求与角 2007° 的终边相同的角, 并确定角 2007° 是第几象限的角.

解 角 2007° 的终边相同的角的是: $\alpha = 360^\circ \cdot k + 2007^\circ, k \in \mathbb{Z}$,

当 $k = -5$ 时, $\alpha = 360^\circ \times (-5) + 2007^\circ = 207^\circ \in (0, 360^\circ)$.

所以在 $[0, 360^\circ)$ 内, 与角 2007° 的终边相同的角是 207° , 且角 2007° 是第三象限的角.

例 3 设 $A = \{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ + 477^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{\beta | \beta = n \cdot 360^\circ - 603^\circ, n \in \mathbb{Z}\}$, 问集

合 A, B 相等吗? 为什么? 并求出集合 A, B 中的最大负角和在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 之间的角.

$$\text{解 } \because 477^\circ = 1 \times 360^\circ + 117^\circ,$$

$$\text{又 } \because -603^\circ = -2 \times 360^\circ + 117^\circ, \therefore 477^\circ \text{ 与 } -603^\circ \text{ 的终边相同, 则 } A = B.$$

$\therefore$ 集合 A, B 中最大的负角是 -243° .

在集合 A 中, 当 $k = -1$ 时, $(-1) \times 360^\circ + 477^\circ = 117^\circ \in A$,

所以在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 之间的角是 117° .

二、弧度制

例 4 用弧度制表示

(1) 终边在 x 轴上的角的集合;

(2) 终边在 y 轴上的角的集合;

(3) 终边在坐标轴上的角的集合.

$$\text{解 终边在 } x \text{ 轴上的角的集合 } S_1 = \{\beta \mid \beta = k\pi, k \in \mathbb{Z}\};$$

$$\text{终边在 } x \text{ 轴上的角的集合 } S_2 = \{\beta \mid \beta = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\};$$

$$\text{终边在坐标轴上的角的集合 } S_3 = \{\beta \mid \beta = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

例 5 若 $0 < \alpha < 2\pi$, 角 7α 的终边与角 α 的终边重合, 求角 α .

$$\text{解 由已知, } 7\alpha = \alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{即 } 6\alpha = 2k\pi, \text{ 故 } \alpha = \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}), \text{ 因为 } \alpha \in (0, 2\pi), \text{ 故有 } \alpha = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}.$$

例 6 判断下列命题的真假

(1) 终边相同的角一定相等;

(2) 第一象限的角都是锐角;

(3) 若 $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 则 α 是第一象限的角;

(4) 若 α 是第一象限的角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 也是第一象限的角.

解 四个命题都是假命题

(1), 如弧度数为 $\frac{\pi}{3}$ 的角与 $\frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z} \text{ 且 } k \neq 0)$ 的角, 终边相同, 但这些角并不相等.

(2), 因为锐角 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 而第一象限的角的表达式为 $2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$,

($k \in \mathbb{Z}$), 显然当 $k \neq 0$ 时, α 并非锐角.

(3) 因为 $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 而 $\alpha = 0$ 或 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 并非象限角.

(4) 如 $\alpha = 2\pi + \frac{\pi}{4}$ 是第一象限的角, 但 $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi$ 并非第一象限的角.

例 7 扇形 AOB 的面积是 4cm^2 , 周长是 10cm , 求扇形 AOB 的圆心角的弧度数.

解 设扇形 AOB 的圆心角的弧度数 α , 弧长为 l , 半径为 r ,

由题意, 得

$$\begin{cases} l + 2r = 10, \\ \frac{1}{2}lr = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 1, \\ l = 8. \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} r = 4, \\ l = 2. \end{cases}$$

$$\text{由 } \begin{cases} r = 1, \\ l = 8. \end{cases} \text{ 得 } \alpha = 8 \text{ (弧度); } \quad \begin{cases} r = 4, \\ l = 2 \end{cases} \text{ 得 } \alpha = \frac{1}{2} \text{ (弧度).}$$

例 8. 已知扇形 OAB 的圆心角为 150° , 面积为 $\frac{5}{3}\pi$, 求弧 AB 的长, 并求扇形内以 AB 为弦的弓形面积.

解: 扇形 OAB 的圆心角 $\alpha = \frac{5\pi}{6}$,

$$\text{则 } S = \frac{1}{2}\alpha r^2 \Rightarrow \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{5\pi}{6} \times r^2 \Rightarrow r = 2,$$

$$\therefore AB = \alpha \cdot r = \frac{5\pi}{6} \times 2 = \frac{5}{3}\pi;$$

$$\text{设弓形的面积为 } S', \text{ 则 } S = S' - S_{\triangle OAB} = \frac{5}{3}\pi - \frac{1}{2} \times 2^2 \times \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} - 1.$$

例 9 已知 α 是第一象限的角,

(1) 2α 的范围是什么? (2) $\frac{\alpha}{3}$ 是第几象限的角?

解 $\because \alpha$ 是第一象限的角, $\therefore 2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$),

(1) $4k\pi < 2\alpha < 4k\pi + \pi$, $\therefore 4k$ 是偶数,

$\therefore 2\alpha$ 是第一或第二象限角或 2α 的终边在 y 轴的正半轴上.

$$(2) \frac{2k\pi}{3} < \frac{\alpha}{3} < \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

当 $k = 3n$ ($n \in \mathbb{Z}$) 时, $2n\pi < \frac{\alpha}{3} < 2n\pi + \frac{\pi}{6}$ ($n \in \mathbb{Z}$), 此时 $\frac{\alpha}{3}$ 是第一象限的角;

当 $k = 3n + 1 (n \in \mathbb{Z})$ 时, $2n\pi + \frac{2\pi}{3} < \frac{\alpha}{3} < 2n\pi + \frac{5\pi}{6} (n \in \mathbb{Z})$, 此时 $\frac{\alpha}{3}$ 是第二象限的角;

当 $k = 3n + 2 (n \in \mathbb{Z})$ 时, $2n\pi + \frac{4\pi}{3} < \frac{\alpha}{3} < 2n\pi + \frac{3\pi}{2} (n \in \mathbb{Z})$, 此时 $\frac{\alpha}{3}$ 是第三象限的角.

第二讲 任意角的三角比

【知识要点】

一、任意角三角比

在任意角 α 终边上任取一点 $P(x, y)$ (P 与原点不重合), $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r},$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} (\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}), \quad \cot \alpha = \frac{x}{y} (\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\sec \alpha = \frac{r}{x} (\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}), \quad \csc \alpha = \frac{r}{y} (\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}).$$

二、终边相同的角的同名三角比相等 (第一组诱导公式):

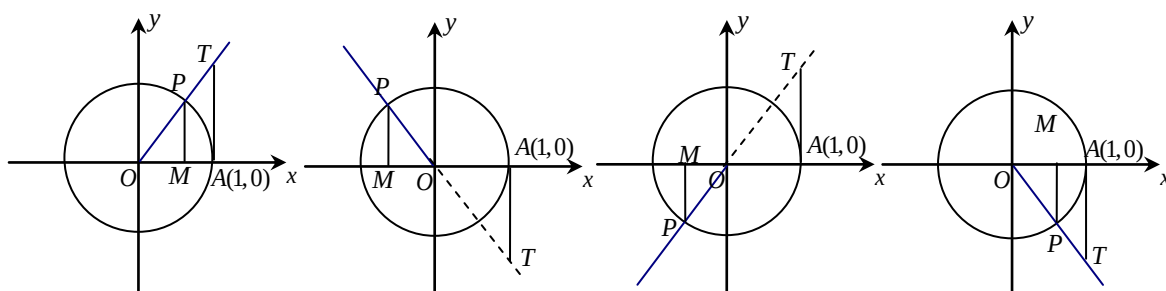
$$\sin(k\pi + \alpha) = \sin \alpha; \quad \cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha; \quad \tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha;$$

$$\cot(k\pi + \alpha) = \cot \alpha, \quad \text{其中 } k \in \mathbb{Z}.$$

三、角 α 各三角比在每个象限的符号:

角 α 所在象限	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$	$\sec \alpha$	$\csc \alpha$
第一象限	+	+	+	+	+	+
第二象限	+	-	-	-	-	+
第三象限	-	-	+	+	-	-
第四象限	-	+	-	-	+	-

四、三角函数线: 设角 α 的终边与原点为圆心的单位圆交于点 P , 则有向线段 MP, OM, AT 的数量分别等于角 α 的正弦、余弦、正切的值, 有向线段 MP, OM, AT 分别称为角 α 的正弦线、余弦线和正切线.



五、特殊角的三角比

角 α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$	$\sec \alpha$	$\csc \alpha$
0						
$\frac{\pi}{6}$						
$\frac{\pi}{4}$						
$\frac{\pi}{3}$						
$\frac{\pi}{2}$						
$\frac{2\pi}{3}$						
$\frac{3\pi}{4}$						
$\frac{5\pi}{6}$						
π						
$\frac{3\pi}{2}$						

【典型例题】

一、任意角三角比的概念

例 1 已知角 α 的终边经过点 $P(12t, -5t)$ ($t < 0$)，求角 α 的六个三角比。

解 因为角 α 的终边经过 $P(12t, -5t)$ ，所以 $x = 12t$, $y = -5t$ 。

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(12t)^2 + (-5t)^2} = -13t, \quad t < 0.$$

$$x = 12t, \quad y = -5t, \quad r = -13t.$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{-5t}{-13t} = \frac{5}{13}; \quad \cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{12t}{-13t} = -\frac{12}{13}; \quad \tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{-5t}{12t} = -\frac{5}{12};$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y} = \frac{12t}{-5t} = -\frac{12}{5}; \quad \sec \alpha = \frac{r}{x} = \frac{-13t}{12t} = -\frac{13}{12}; \quad \csc \alpha = \frac{r}{y} = \frac{-13t}{-5t} = \frac{13}{5}.$$

例 2 已知角 α 终边与函数 $y = -3x$ 图象重合，求角 α 各三角比的值。

解①当角 α 终边在第二象限时,取终边上任一点 $P(x, -3x)$ ($x < 0$)

则 P 点到原点的距离 $r = \sqrt{x^2 + 9x^2} = \sqrt{10}|x| = -\sqrt{10}x$.

$$\sin \alpha = \frac{-3x}{-\sqrt{10}x} = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{-\sqrt{10}x} = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \tan \alpha = \frac{-3x}{x} = -3,$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{-3x} = -\frac{1}{3}, \quad \sec \alpha = \frac{-\sqrt{10}x}{x} = -\sqrt{10}, \quad \csc \alpha = \frac{-\sqrt{10}x}{-3x} = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

②当角 α 终边在第四象限时,取终边上任一点 $P(x, -3x)$ ($x > 0$), $r = \sqrt{10}x$,

$$\text{同理可得: } \sin \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \tan \alpha = -3, \quad \cot \alpha = -\frac{1}{3},$$

$$\sec \alpha = \sqrt{10}, \quad \csc \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{3}.$$

例3 已知 $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$, 且 α 是第四象限角, 求 α 的其它三角比.

解 : 因为 $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$, α 在第四象限, 所以可设 $y = -1, x = 2$, 得 $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5}$.

$$\text{所以 } \sin \alpha = \frac{y}{r} = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{2}{5}\sqrt{5}, \quad \cot \alpha = \frac{x}{y} = -2,$$

$$\sec \alpha = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \csc \alpha = \frac{r}{y} = -\sqrt{5}.$$

例4 已知角 α 的终边上的一点 P , 满足 $|OP| = 13$, 且 $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$, 求点 P 的坐标.

解 设点 P 的坐标为 (x, y) , $r = |OP| = 13$, 由 $\cos \alpha = \frac{y}{r} = -\frac{5}{13}$ 得 $y = -5$.

因为 $r^2 = x^2 + y^2$ 得 $x^2 = 144$, 则 $x = \pm 12$.

所以点 P 的坐标为 $(12, -5)$ 或 $(-12, -5)$.

二、诱导公式以及三角比的符号

例5 求下列各三角比:

$$(1) \sin\left(-\frac{23}{6}\pi\right) \quad (2) \cos\left(-\frac{31}{4}\pi\right) \quad (3) \tan(-315^\circ)$$

$$\text{解 (1) } \sin\left(-\frac{23}{6}\pi\right) = \sin(-2 \times 2\pi + \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$(2) \cos\left(-\frac{31}{4}\pi\right) = \cos(-4 \times 2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$(3) \tan(-315^\circ) = \tan(-360^\circ + 45^\circ) = \tan(-1 \times 360^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1.$$

例 6 根据下列条件确定 θ 所属象限 (不考虑角的终边在坐标轴上):

$$(1) \sin \theta < 0 \text{ 且 } \cos \theta > 0;$$

$$(2) \cos \theta \cdot \tan \theta < 0;$$

$$(3) \csc \theta > 0 \text{ 且 } \sec \theta < 0;$$

$$(4) \frac{\sin \theta}{\cot \theta} > 0.$$

解 (1) $\because \sin \theta < 0, \therefore \theta$ 是第三或第四象限的角; 又 $\because \cos \theta > 0, \therefore \theta$ 是第一或第四象限的角, 所以 θ 是第四象限的角.

(2) $\because \cos \theta \cdot \tan \theta < 0, \therefore \cos \theta$ 与 $\tan \theta$ 异号. 如果 $\cos \theta > 0$ 且 $\tan \theta < 0$, 则 θ 是第四象限的角; 如果 $\cos \theta < 0$ 且 $\tan \theta > 0$, 则 θ 是第三象限的角. 所以 θ 是第三或第四象限的角.

(3) $\because \csc \theta > 0, \therefore \theta$ 是第一或第二象限的角; 又 $\because \sec \theta < 0, \therefore \theta$ 是第二或第三象限的角, 所以 θ 是第二象限的角.

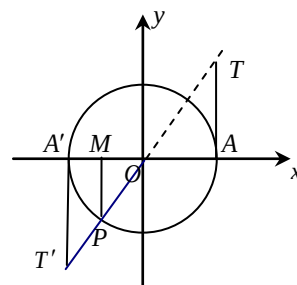
(4) $\because \frac{\sin \theta}{\cot \theta} > 0, \therefore \sin \theta$ 与 $\cot \theta$ 同号. 如果 $\sin \theta > 0$ 且 $\cot \theta > 0$, 则 θ 是第一象限的角; 如果 $\sin \theta < 0$ 且 $\cot \theta < 0$, 则 θ 是第四象限的角. 所以 θ 是第一或第四象限的角.

[点评] 已知同一个角的不同三角比的符号, 要确定角所在的象限时, 应分别根据各个三角比的符号确定角所在的象限, 再求出其公共象限. 需注意 $\sin \theta > 0, \theta$ 属第一、二象限且包括 y 轴正向.

例 7 如图, 在单位圆中, 角 α 的终边为 OT' , 则角 α 的正弦线、余弦线、正切线的写法完全正确的是 (c)

A . 正弦线 MP 、余弦线 MO 、正切线 AT' (B) 正弦线 PM 、余弦线 MO 、正切线 AT

C . 正弦线 MP 、余弦线 OM 、正切线 AT (D) 正弦线 PM 、余弦线 OM 、正切线 $T'A'$



第三讲 答案

【点击双基】

1. $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$ 2. $-\sin \alpha - \cos \alpha$ 3. -1 4. $\frac{3}{5}$
 5. $\frac{11}{16}$ 6. $[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$ 7. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ 8. ①

【典型例题】

例 1: $\cos \alpha = \frac{5}{13}$.

例 2: $\frac{5-\sqrt{2}}{3}$.

例 3: $\frac{23}{32}$.

例 4: $\frac{2}{|\cos \alpha|}$.

例 5: (1) $\sin \alpha$ (2) $-\cos^4 \theta$

例 6: 略

例 7: 略

例 8: 略

例 9: (1) $-\frac{4}{3}$

$$(2) \text{原式} = \begin{cases} 2\cos \alpha, & \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right] \\ 2\sin \alpha, & \alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \\ -2\cos \alpha, & \alpha \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right) \end{cases}$$

例 10:

$$\begin{aligned} \text{解: 法一: 原式} &= \frac{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^3 - \cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha} \\ &= \frac{2\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{3\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

【回家作业】

1. $\cos \theta$ 2. $\cos 8$ 3. 1 4. 1 5. $-2\sec \theta$ 6. $\frac{3}{2}$
 7. $-\frac{5}{12}$ 8. 1 9. C 10. B 11. D 12. D

第四讲 答案

【点击双基】

1. 0 2. $\frac{16}{65}$ 、 $\frac{33}{65}$ 、 $-\frac{56}{33}$ 、 $-\frac{119}{169}$ 。 3. $\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$
4. $-\frac{507}{845}$ 5. B 6. C 7. $-\frac{56}{65}$

【典型例题】

例 1: $\frac{33}{65}$

例 2: $-\frac{239}{729}$

例 3: $\frac{24}{13}$

例 4: 4

例 5: $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right]$

例 6: 0

例 7: 略

例 8: $\frac{\pi}{4}$

例 9: $\frac{\pi}{3}$.

例 10: $-\frac{1}{2}$.

例 11: 略

例 12: $-\frac{p}{3}$

例 13: $\left[-\frac{7\sqrt{3}}{3}, -2\sqrt{2}\right]$

【回家作业】

(1) $\sin \alpha$ (2) $\sin \alpha \cos \beta$ (3) $\cos \alpha$ (4) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ (5) $-\frac{5}{13}$ (6) $-\sqrt{3}$ (7) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$

(8) $\tan \alpha - \tan \beta$ (9) $\tan \alpha$ (10) $-\frac{11}{14}$ (11) 3

DAA

第六讲 正弦定理和余弦定理

【知识与方法】

1. 三角形面积公式

2. 正弦定理

3. 余弦定理

【基础题】

(1) $\triangle ABC$ 中, 用三个角 A 、 B 、 C 及外接圆半径 R 表示三角形的面积, 得 $S=$ _____;

用三条边及外接圆半径表示三角形面积, 得 $S=$ _____;

用内切圆半径 r , 周长 $2p$ 表示三角形面积, 得 $S=$ _____;

$$S=2R^2 \sin A \sin B \sin C; S=\frac{abc}{4R}; S=rp;$$

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c ,

①若 $a=2\sqrt{3}, B=\frac{\pi}{4}, c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$, 则 $A=$ _____;

②若 $(\sin A + \sin B + \sin C)(\sin A + \sin B - \sin C) = 3\sin A \sin B$,
则 $\angle C=$ _____;

① $\frac{\pi}{3}$; ② $\frac{\pi}{3}$;

(3) 在 A 为顶角的等腰 $\triangle ABC$ 中,

① 已知 $\sin A = \frac{3}{5}$, 则 $\cos B=$ _____;

② 已知 $\sin B = \frac{3}{5}$, 则 $\sin A=$ _____;

① $\cos B = \frac{\sqrt{10}}{10}$ 或 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$; ② $\sin A = \frac{24}{25}$;

(4) 试判断下列 Δ 的形状:

- ① 在 ΔABC 中, 若 $a \cdot \cos A = b \cdot \cos B$, 则 ΔABC 的形状是_____;
- ② 在 ΔABC 中, 若 $a \sin A = b \sin B$, 则 ΔABC 的形状是_____;

①等腰三角形或直角三角形;

②等腰三角形;

(5) 在 ΔABC 中, $\tan A = \frac{1}{2}, \tan B = \frac{1}{3}$, 最长边为 1, 则最短边长为_____;

$$\frac{\sqrt{5}}{5}$$

(6) 在 ΔABC 中, $\cos B = \frac{4}{5}, \sin C = \frac{5}{13}$, 则 $\cos A =$ _____.

$$-\frac{33}{65}$$

【能力题】

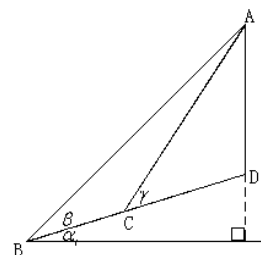
例 1: 在 ΔABC 中, 三边长为 a, b, c 且 $2b = a + c$, 求 b 边长所对的角 B 的取值范围。

解: $\because a + c = 2b$

$$\therefore \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + c^2 - \left(\frac{a+c}{2}\right)^2}{2ac} = \frac{3}{8} \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) - \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2} \quad (\text{当且仅当 } a = c \text{ 时}$$

等号成立), 又 $\because B \in (0, \pi), \therefore B \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right]$

例2. 在与水平方向成 α 角的斜坡 BCD 上有一座塔 AD , 从 B 、 C 测得塔



的张角分别为 β 、 γ 。若 $BC = a$ ，求塔高 AD 。

例3. 解：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = \gamma - \beta$ ，

$$\therefore \frac{a}{\sin(\gamma - \beta)} = \frac{AC}{\sin \beta}, \therefore AC = \frac{a \sin \beta}{\sin(\gamma - \beta)}, \text{ 在 } \triangle ACD \text{ 中, } \angle ADC = \alpha + \frac{\pi}{2}, \therefore$$

$$\frac{AD}{\sin \gamma} = \frac{AC}{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}, \therefore AD = \frac{a \sin \beta \sin \gamma}{\sin(\gamma - \beta) \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}$$

例 3. 在 $\triangle ABC$ 中 $a = 30, S_{\triangle ABC} = 105$ ，外接圆的半径 $R = 17$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长。

$$\text{解: } \frac{a}{\sin A} = 2R, \therefore \sin A = \frac{15}{17} \therefore S = \frac{1}{2}bc \sin A$$

$$\therefore bc = 238, \text{ 又 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \cos A = \pm \frac{8}{17}$$

$$\therefore b^2 + c^2 = 1124 \text{ 或 } 676, \therefore b + c = 40 \text{ 或 } 24\sqrt{2}, \therefore \triangle ABC \text{ 的周长} = 70 \text{ 或 } 30 + 24\sqrt{2}$$

例 4. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c 。若 $(\sqrt{3}b - c) \cos A = a \cos C$ ，求 $\cos A$ 。

$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

例 5. $\triangle ABC$ 的三个内角期中一角等于另外两角之和，($A > B > C$)，

$$(1) \text{ 计算 } \frac{a^2 + c^2 - b^2}{ac} \text{ 的值;}$$

(2) 若 $\tan A, \tan C$ 是方程 $x(x-3) + 2 = \sqrt{3}(x-1)$ 的两个根，且 $\triangle ABC$ 的面积为 $3 - \sqrt{3}$ ，求角 A, B, C 的大小及边 a 的长度。

$$(1) \frac{a^2 + c^2 - b^2}{ac} = 1; (2) A = \frac{5\pi}{12}, B = \frac{\pi}{3}, C = \frac{\pi}{4}, a = 2$$

例6. 已知三角形两边之和是 8，其夹角是 60° ，求这个三角形周长的最小值和面积的最大值，并指出面积最大时三角形的形状。

$$1. S = 4\sqrt{3}, l = 12, \text{ 正三角形}$$

【巩固提高】

1. (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = \sqrt{17}$, $b = \sqrt{13}$, $S_{\triangle ABC} = 5$, 则 $\angle C =$

$$\arcsin \frac{10}{\sqrt{221}} \text{ 或 } \pi - \arcsin \frac{10}{\sqrt{221}};$$

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 3, c = 3\sqrt{3}, \angle A = 30^\circ$, 则 $b = 3$ 或 6 ;

(3) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $(a^2 + c^2 - b^2)\tan B = \sqrt{3}ac$, 则角 $B = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$;

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 三个角 A, B, C 的对边边长分别为 $a = 3, b = 4, c = 6$ 则

$$bc \cos A + ca \cos B + ab \cos C = \frac{61}{2};$$

3. 设 A, B, C 为三角形的三个内角, 且方程 $(\sin A - \sin B)x^2 + (\sin C - \sin A)x + \sin B$

$-\sin C = 0$ 有两个相等的实数根, 求 B 的取值范围。

$$B \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right]$$

4. 在一个特定时段内, 以点 E 为中心的 7 海里以内海域被设为警戒水域. 点 E 正北 55 海里处有一个雷达观测站 A . 某时刻测得一艘匀速直线行驶的船只位于点 A 北偏东 45° 且与点 A 相距 $40\sqrt{2}$ 海里的位置 B , 经过 40 分钟又测得该船已行驶到点 A 北偏东 $45^\circ + \theta$ (其中 $\sin \theta = \frac{\sqrt{26}}{26}$, $0^\circ < \theta < 90^\circ$) 且与点 A 相距 $10\sqrt{13}$ 海里的位置 C .

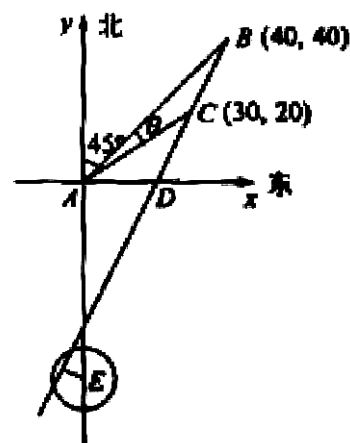
(1) 求该船的行驶速度 (单位: 海里/小时);

(2) 若该船不改变航行方向继续行驶, 判断它是否会进入警戒水域, 并说明理由.



$$\text{船的行驶速度为 } \frac{10\sqrt{5}}{\frac{2}{3}} = 15\sqrt{5} \text{ (海里/小时);}$$

船会进入警戒水域.



第七讲 三角比综合

一、填空题

1. 若 $3\sin\theta + 4\cos\theta = 0$, 则 $\sin 2\theta + \cos 2\theta =$ $-\frac{31}{25}$.
2. $\sin\alpha - \sin\beta = \cos\beta - \cos\alpha = \frac{1}{2}$, 则 $\cos(\alpha - \beta) =$ $\frac{3}{4}$.
3. 若 α 为锐角, 且 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{6}$, 则 $\sin\alpha =$ $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{35}}{12}$.
4. 若 $\frac{\sin\theta}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = 2$, 则 $\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) =$ $-\frac{31\sqrt{2}}{50}$.
5. 已知 $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{2}$, 且 $\pi < \alpha < 2\pi$, 则 $\tan\frac{\alpha}{2} =$ $-2 - \sqrt{7}$.
6. 已知 $\tan\alpha - \cot\alpha = 10$, 则 $\tan 2\alpha =$ $-\frac{1}{5}$.
7. 化简: $\sqrt{1 - \cos 4 - \sin^2 2} =$ $\sin 2$.
8. 若 $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{1}{3}$, 则 $\sin^4\theta + \cos^4\theta =$ $\frac{13}{18}$.
9. 若 $2\sin\alpha = 1 + \cos\alpha$, 则 $\tan\alpha =$ $\frac{4}{3}$ 或 0.
10. 若 $\sin\alpha : \sin\frac{\alpha}{2} = 8:5$, 则 $\cot\frac{\alpha}{4} =$ ± 3 .
11. 若一个三角形的三边长分别为 $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, 且 $a^2 + b^2 = c^2$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 锐角三角形.
12. 下列四个命题中, 错误命题的序号是 1, 2, 3.
 (1) 若 $\sin A = \cos B$, 则 $\triangle ABC$ 是直角三角形; (2) 若 $\sin 2A = \sin 2B$, 则 $\triangle ABC$ 是等腰三角形; (3) 若 $\tan A \tan B > 1$, 则 $\triangle ABC$ 是钝角三角形; (4) 若 $\cos(A-B) \cdot \cos(B-C) \cdot \cos(C-A) = 1$, 则 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

二、解答题

13. 已知 $\sin \theta = \frac{4}{5}$, $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\tan(\alpha + \theta) = 2$, 求 $2\sin^2 \alpha - \frac{1}{2}\tan \frac{\theta}{2}$ 的值.

$$\frac{3}{5}$$

14. 设 $\sin \alpha + \cos \alpha = k$, 若 $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha < 0$, 求实数 k 的取值范围.

$$[-\sqrt{2}, 0)$$

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\tan A : \tan B : \tan C = 1 : 2 : 3$, 求 $\frac{\sin B}{\sin C}$ 的值.

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

16. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为三个内角 A, B, C 的对边, 若 $a = 2, C = 45^\circ, \cos \frac{B}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

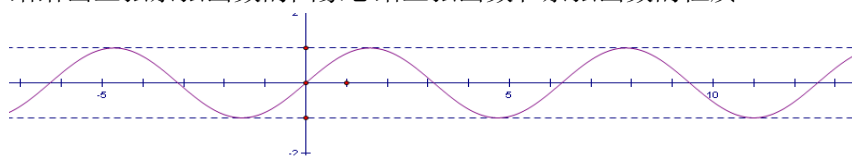
求 $\triangle ABC$ 的面积 S .

$$\frac{8}{7}$$

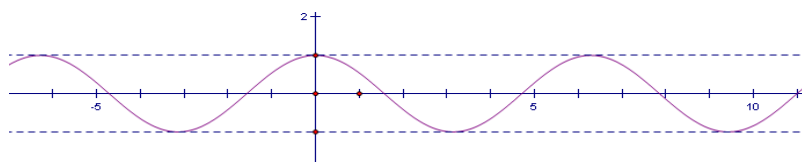
第九讲 正余弦函数的图像与性质

【知识梳理】

结给出正弦余弦函数的图象总结正弦函数和余弦函数的性质



$$y = \sin x \ (x \in \mathbb{R})$$



$$y = \cos x$$

$(x \in \mathbb{R})$

$$y = \sin x \ (x \in \mathbb{R})$$

$$y = \cos x \ (x \in \mathbb{R})$$

1. 定义域

2. 值域

(2) 最值

3. 周期性

4. 奇偶性

5. 对称性

6. 单调区间

基础题:

1、判断下列函数的奇偶性:

(1) $y = x^2 \cdot \sin x$

奇函数非偶函数

(2) $y = \cot x - \tan x$

奇函数非偶函数

(3) $y = \sin^4 x + \cos^4 x + \cos x$

偶函数非奇函数

(1) $y = \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin x + \cos x}$

(2) 非奇函数非偶函数.

2. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = \sin x + \cos x + 1;$

(2) $f(x) = \sin x \cos x;$

(3) $f(x) = \sin 2|x|。$

(4) $f(x) = \lg(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})$

解: (1) 因为 $f(x) = \sin x + \cos x + 1$ 的定义域为 R , 又 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} + 1 = 2$,

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0$ 所以 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $f(x)$ 是非奇非偶函数。

(2) 因为 $f(x) = \sin x \cos x$ 为定义域为 R , 且对任意 $x \in R$,

$$\text{有 } f(-x) = \sin(-x)\cos(-x) = -\sin x \cos x = -f(x) \text{ 成立, 又 } f\left(-\frac{\pi}{3}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

所以 $f(x) = \sin x \cos x$ 是奇函数非偶函数。

(3) 因为 $f(x) = \sin 2|x|$ 的定义域为 R , 且对任意, 有

$f(-x) = \sin 2|-x| = \sin 2|x| = f(x)$ 成立, 又 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, 所以 $f(x) = \sin 2|x|$ 是

偶函数非奇函数。

$$(4) f(x) = \lg(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})$$

解: 函数的定义域为 $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \lg[\sin(-x) + \sqrt{1 + \sin^2 x}] = \lg(-\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}) \\ &= \lg(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})^{-1} = -\lg(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}) = -f(x) \end{aligned}$$

所以函数 $f(x) = \lg(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})$ 为奇函数。

3、求下列函数的最小正周期:

$$(1) y = 2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(2) y = |\sin 2x|$$

$$(3) y = \frac{\cos 2x + \sin 2x}{\cos 2x - \sin 2x}$$

$$(3) y = \sin^6 x + \cos^6 x$$

$$\text{参考解答: } (1) T = \frac{2}{3}\pi, (2) T = \frac{\pi}{2}, (3) T = \frac{\pi}{2}, (4) T = \frac{\pi}{2}$$

4、求下列函数的最大值和最小值, 并求出取最大值和最小值时 x 的集合。

$$(1) y = \frac{1}{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right);$$

解: (1) 当 $2x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, 即 $x = k\pi + \frac{\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$ 时, y 取最大值 $\frac{1}{3}$,

当 $2x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, 即 $x = k\pi + \frac{7\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$ 时, y 取最小值 $-\frac{1}{3}$ 。

$$(2) y = 2 - 3 \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)。$$

(2) 当 $3x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi$, 即 $x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$ 时, y 取最小值 -1 ,

当 $3x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi$, 即 $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ 时, y 取最大值 5。

能力题:

例 1 求下列函数的单调递增区间:

$$(1) y = \frac{1}{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right); \quad y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right).$$

解: (1) 考察 $y = \sin x (x \in \mathbb{R})$ 的图像可知, 当 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, 即

$$k\pi - \frac{3\pi}{8} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{8} (k \in \mathbb{Z}) \text{ 时, } y = \frac{1}{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ 单调递增,}$$

$$\text{所以 } y = \frac{1}{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ 的单调递增区间是 } \left[k\pi - \frac{3\pi}{8}, k\pi + \frac{\pi}{8}\right], k \in \mathbb{Z}.$$

$$(2) y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = -2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{所以当 } 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 3x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, \text{ 即 } \frac{2k\pi}{3} + \frac{5\pi}{18} \leq x \leq \frac{2k\pi}{3} + \frac{11\pi}{18} (k \in \mathbb{Z}) \text{ 时,}$$

$$y = 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \text{ 单调递减.}$$

$$\text{所以 } y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) \text{ 的单调递增区间是 } \left[\frac{2k\pi}{3} + \frac{5\pi}{18}, \frac{2k\pi}{3} + \frac{11\pi}{18}\right] (k \in \mathbb{Z}).$$

例 2、已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin(\omega x + \varphi) - \cos(\omega x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi, \omega > 0$) 为偶函数, 且

函数 $y = f(x)$ 图象的两相邻对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

$$(1) \text{ 求 } f\left(\frac{\pi}{8}\right) \text{ 的值;}$$

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后, 得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 求 $g(x)$ 的单调递减区间.

$$\text{解: (1) } f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}. \quad (2) \text{ 递减区间为 } \left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}\right] (k \in \mathbb{Z}).$$

例 3、已知函数 $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} + \sin x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 当 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$ 且 $f(x_0) = \frac{4\sqrt{2}}{5}$ 时, 求 $f(x_0 + \frac{\pi}{6})$ 的值。

(1) 2π (2) $\frac{4\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{10}$

例 4、已知函数 $f(x) = \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{12} \right)$, $g(x) = 1 + \frac{1}{2} \sin 2x$.

(1) 设 $x = x_0$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴, 求 $g(x_0)$ 的值.

(2) 求函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ 的单调递增区间.

解: (1) 由题设知 $f(x) = \frac{1}{2} [1 + \cos(2x + \frac{\pi}{6})]$. 因为 $x = x_0$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴, 所以 $2x_0 + \frac{\pi}{6} = k\pi$, 即 $2x_0 = k\pi - \frac{\pi}{6}$ ($k \in \mathbf{Z}$). 所以 $g(x_0) = 1 + \frac{1}{2} \sin 2x_0 = 1 + \frac{1}{2} \sin(k\pi - \frac{\pi}{6})$.

当 k 为偶数时, $g(x_0) = 1 + \frac{1}{2} \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$,

当 k 为奇数时, $g(x_0) = 1 + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

(2) $h(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) \right] + 1 + \frac{1}{2} \sin 2x$
 $= \frac{1}{2} \left[\cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + \sin 2x \right] + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{3}{2}$.

当 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, 即 $k\pi - \frac{5\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{12}$ ($k \in \mathbf{Z}$) 时,

函数 $h(x) = \frac{1}{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{3}{2}$ 是增函数,

故函数 $h(x)$ 的单调递增区间是 $\left[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12} \right]$ ($k \in \mathbf{Z}$).

例 5、已知函数 $f(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$, $g(x) = \cos x \cdot f(\sin x) + \sin x \cdot f(\cos x)$, $x \in (\pi, \frac{17\pi}{12})$.

(1) 将函数 $g(x)$ 化简成 $A \sin(\omega x + \phi) + B$ ($A > 0$, $\omega > 0$, $\phi \in [0, 2\pi]$) 的形式;

(2) 求函数 $g(x)$ 的值域. (选用)

解: (1)

$$\begin{aligned} g(x) &= \cos x \cdot \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} + \sin x \cdot \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \cos x \cdot \sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}} + \sin x \cdot \sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}} \\ &= \cos x \cdot \frac{1-\sin x}{|\cos x|} + \sin x \cdot \frac{1-\cos x}{|\sin x|}. \quad \because x \in \left(\pi, \frac{17\pi}{12}\right], \therefore |\cos x| = -\cos x, |\sin x| = -\sin x, \\ \therefore g(x) &= \cos x \cdot \frac{1-\sin x}{-\cos x} + \sin x \cdot \frac{1-\cos x}{-\sin x} = \sin x + \cos x - 2 = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2. \end{aligned}$$

(2) 由 $\pi < x \leq \frac{17\pi}{12}$, 得 $\frac{5\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{3}$. $\therefore \sin t$ 在 $\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上为减函数,

在 $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right]$ 上为增函数, 又 $\sin \frac{5\pi}{3} < \sin \frac{5\pi}{4}$, $\therefore \sin \frac{3\pi}{2} \leq \sin(x + \frac{\pi}{4}) < \sin \frac{5\pi}{4}$ (当

$x \in \left(\pi, \frac{17\pi}{12}\right)$, 即 $-1 \leq \sin(x + \frac{\pi}{4}) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore -\sqrt{2} - 2 \leq \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) - 2 < -3$,

故 $g(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{2} - 2, -3)$.

巩固提高:

1、已知 $\sin A - 2 \cos A = 0$

(1) 求 $\tan A$ 的值;

(2) 求函数 $f(x) = \cos 2x + \tan A \sin x$ ($x \in \mathbf{R}$) 的值域.

解: (1) $\tan A = 2$. (2) $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$.

2、已知函数 $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{3}) + 2 \sin(x - \frac{\pi}{4}) \sin(x + \frac{\pi}{4})$

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和图象的对称轴方程

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}]$ 上的值域

解: (1) $\therefore$ 周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 对称轴 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$ (2) 值域为 $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$

3、已知 $\sin x + \sin y = \frac{2}{3}$, 求 $\frac{2}{3} + \sin y - \cos^2 x$ 的取值范围 $[\frac{1}{12}, \frac{7}{9}]$

4、(1) 已知 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 证明不存在实数 $m \in (0, 1)$ 能使等式 $\cos x + m \sin x = m$ (*) 成立;

(2) 试扩大 x 的取值范围, 使对于实数 $m \in (0, 1)$, 等式 (*) 能成立;

(3) 在扩大后的 x 取值范围内, 若取 $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 求出使等式 (*) 成立的 x 值。

提示: (1) 可化为 $m = \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) > 1$ (2) $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (3) $x = -\frac{\pi}{6}$

5、已知函数 $f(x) = 1 - 2\sin^2(x + \frac{\pi}{8}) + 2\sin(x + \frac{\pi}{8})\cos(x + \frac{\pi}{8})$. 求:

(1) 函数 $f(x)$ 的最小正周期; (2) 函数 $f(x)$ 的单调增区间.

解: 1. (1) $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$; (2) 递增区间是 $[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi] (k \in \mathbf{Z})$.

6、已知函数 $f(x) = 2\cos x(\sin x - \cos x) + 1, x \in \mathbf{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期; (2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}]$ 上的最小值和最大值.

1) 最小正周期为 π .

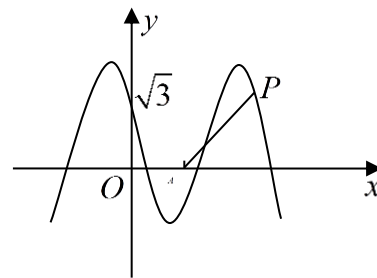
(2) 函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}]$ 上的最大值为 $\sqrt{2}$, 最小值为 $f(\frac{3\pi}{4}) = -1$

7、如图, 函数 $y = 2\cos(\omega x + \theta) (x \in \mathbf{R}, \omega > 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ 的图象与 y 轴相交于点 $(0, \sqrt{3})$,

且该函数的最小正周期为 π .

(1) 求 θ 和 ω 的值;

(2) 已知点 $A(\frac{\pi}{2}, 0)$, 点 P 是该函数图象上一点, 点 $Q(x_0, y_0)$ 是



PA 的中点, 当 $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_0 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时, 求 x_0 的值.

$$1) \theta = \frac{\pi}{6}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2. \quad (2) x_0 = \frac{2\pi}{3} \text{ 或 } x_0 = \frac{3\pi}{4}.$$

8、求函数 $y = 7 - 4\sin x \cos x + 4\cos^2 x - 4\cos^4 x$ 的最大值与最小值.

$$y_{\max} = 10, \quad y_{\min} = 6$$

9. 某同学对函数 $f(x) = x \sin x$ 进行研究后, 得出以下结论:

- ①函数 $y = f(x)$ 的图像是轴对称图形;
- ②对任意实数 x , $|f(x)| \leq |x|$ 均成立;
- ③函数 $y = f(x)$ 的图像与直线 $y = x$ 有无穷多个公共点, 且任意相邻两点的距离相等;
- ④当常数 k 满足 $|k| > 1$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的图像与直线 $y = kx$ 有且仅有一个公共点.

其中所有正确结论的序号是 ▲ .

【答案】 ①②④

① $f(-x) = -x \sin(-x) = x \sin x = f(x)$, 所以函数 $f(x) = x \sin x$ 是偶函数, 所以关于 y 轴对称, 所以①正确. ② $|f(x)| = |x \sin x| = |x| |\sin x| \leq |x|$, 所以②正确. ③由 $f(x) = x \sin x = x$, 得 $\sin x = 1$ 或 $x = 0$, 所以 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 所以任意相邻两点的距离不一定相等, 所以③错误. ④由 $f(x) = x \sin x = kx$, 即 $x(\sin x - k) = 0$, 因为 $|k| > 1$, 所以 $\sin x - k \neq 0$, 所以必有 $x = 0$, 所以函数 $y = f(x)$ 的图像与直线 $y = kx$ 有且仅有一个公共点, 所以④正确. 所以所有正确结论的序号是①②④.

10、设 $f(x) = 6\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最大值及最小正周期; (2) 若锐角 α 满足 $f(\alpha) = 3 - 2\sqrt{3}$, 求 $\tan \frac{4}{5}\alpha$ 的值.

2. 解: (1) 最大值为 $2\sqrt{3} + 3$; 最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. (2) 从而 $\tan \frac{4}{5}\alpha = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

11、已知函数 $f(x) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{3}\cos 2x$, $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(1) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值;

(2) 若不等式 $|f(x) - m| < 2$ 在 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立, 求实数 m 的取值范围.

3. 【解】解: (1) $\because f(x) = \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)\right] - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x$

$= 1 + 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 又 $\because x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\therefore \frac{\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}$, 即

$$2 \leq 1 + 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 3,$$

$$\therefore f(x)_{\max} = 3, f(x)_{\min} = 2.$$

(2) $\because |f(x) - m| < 2 \Leftrightarrow f(x) - 2 < m < f(x) + 2$, $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$\therefore m > f(x)_{\max} - 2$ 且 $m < f(x)_{\min} + 2$, $\therefore 1 < m < 4$, 即 m 的取值范围是 $(1, 4)$.

12、设函数 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x + \cos^2 \omega x$, 其中 $0 < \omega < 2$;

(1) 若 $f(x)$ 的最小正周期为 π , 求 $f(x)$ 的单调增区间; (7分)

(2) 若函数 $f(x)$ 的图象的一条对称轴为 $x = \frac{\pi}{3}$, 求 ω 的值. (7分)

4. 【答案】(1) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x + \frac{1 + \cos 2\omega x}{2}$

$$= \sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}.$$

$$\because T = \pi, \omega > 0, \therefore \frac{2\pi}{2\omega} = \pi, \therefore \omega = 1.$$

$$\text{令 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{得, } -\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

所以, $f(x)$ 的单调增区间为: $\left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}.$

$$(2) \because f(x) = \sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} \text{ 的一条对称轴方程为 } \frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore 2\omega \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\therefore \omega = \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}.$$

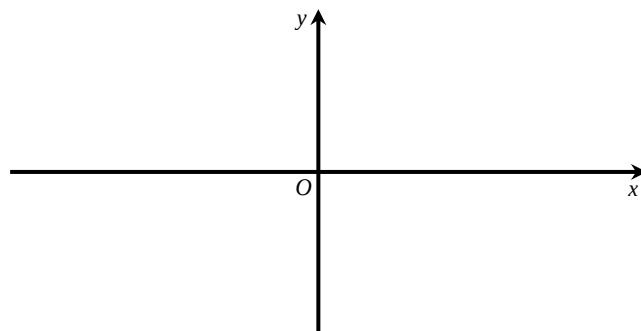
$$\text{又 } 0 < \omega < 2, \therefore -\frac{1}{3} < k < 1. \therefore k = 0, \therefore \omega = \frac{1}{2}.$$

第十讲 正切函数的图像和性质

【知识要点】

1. 正切函数 $y = \underline{\hspace{2cm}}$, 是一个以 $\underline{\hspace{2cm}}$ 为定义域,
 $\underline{\hspace{2cm}}$ 为最小正周期, 在每一个 $\underline{\hspace{2cm}}$ 内单调 $\underline{\hspace{2cm}}$ 且值域为
 $\underline{\hspace{2cm}}$ 的 $\underline{\hspace{2cm}}$ 函数.

2. 正切曲线的大致如图所示: (画三个周期)



基础题:

1. 写出下列函数的周期:

(1) $y = \tan \frac{x}{2}$, _____ 2π _____; (2) $y = \tan \pi x$, _____ 1 _____;

(3) $y = \tan(2x - \frac{\pi}{4})$, _____ $\frac{\pi}{2}$ _____.

2. 观察正切曲线, 写出满足 $\tan \leq 0$ 的 x 值的范围 _____.

$$(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi], k \in \mathbb{Z}$$

3. 不求值, 根据正切函数的单调性比大小:

$\tan(\frac{2\pi}{3})$ _____ $\tan(\frac{3\pi}{4})$; $\tan(k\pi - \frac{\pi}{3})$ _____ $\tan(k\pi + \frac{\pi}{3})$. $<$, $>$

4. 已知 $x \in [0, 2\pi]$, 求适合下列条件的角 x 的区间:

(1) 角 x 的正弦函数、正切函数都是增函数 _____ $[0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ _____;

(2) 角 x 的余弦函数是减函数, 正切函数是增函数, _____
 $[0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ _____.

5. 判断下列函数的奇偶性, 并说明理由.

(1) $f(x) = -2 \tan 3x$;

(2) $f(x) = x \tan x$.

解: (1) 奇函数, $f(-x) = -2 \tan[3(-x)] = 2 \tan 3x = -f(x)$;

(2) 偶函数, $f(-x) = (-x) \tan(-x) = x \tan x = f(x)$

6. 求函数 $g(x) = 4 \tan(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{5})$ 的定义域和单调区间.

解: 定义域 $\{x | x \in \mathbb{R}, x \neq 2k\pi + \frac{7\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\}$, 单增区间为每一个

$$(2k\pi - \frac{3\pi}{5}, 2k\pi + \frac{7\pi}{5}), k \in \mathbb{Z}$$

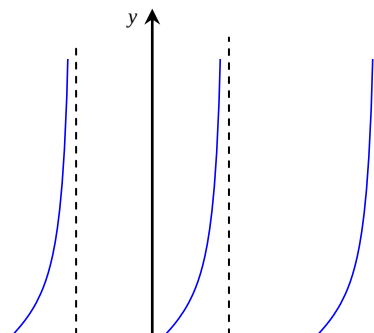
能力题:

例 1. 已知 $f(x) = \frac{\tan x + |\tan x|}{2}$, $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$,

(1) 画出该函数的大致图像; (2) 指出它的周期, 单调区间和值域.

解: (1) 如图:

提示: $f(x) = \begin{cases} \tan x, & \tan x \geq 0 \\ 0, & \tan x < 0 \end{cases}$



(2) $T = \pi$, 单增区间 $[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}$,

值域为 $[0, +\infty)$.

例 2. 求函数 $f(x) = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}$ 的最小正周期.

解: $T = 2\pi$

提示: $f(x) = \tan x$, 因为 $\tan x, \tan \frac{x}{2}$ 都要有意义,

因此定义域为 $D = \{x | x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, x \neq 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}\}$, 此定义域下 $0 \in D, \pi \notin D$

所以最小正周期为 2π

例 3. 在一幢高 29 米的大楼 AC 顶端, 树立着一块高 7 米的广告牌,

求在距离楼水平距离多少远处观看广告牌的视角 ($\angle AMB$) 最大?

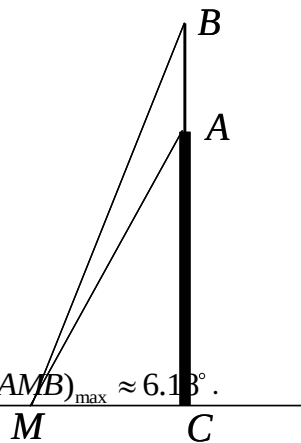
(精确到 0.01)

解. $(\angle AMB)_{\max} \approx 6.18^\circ$

提示: 设 $\angle AMC = \alpha, \angle BMC = \beta, MC = x$

$$\tan \angle AMB = \tan(\beta - \alpha) = \frac{7}{x + \frac{1044}{x}} \leq \frac{7}{2\sqrt{1044}},$$

当且仅当 $x = \sqrt{1044}$ 时, $(\tan \angle AMB)_{\max} = \frac{7}{2\sqrt{1044}}$, 利用计算器: $(\angle AMB)_{\max} \approx 6.18^\circ$.

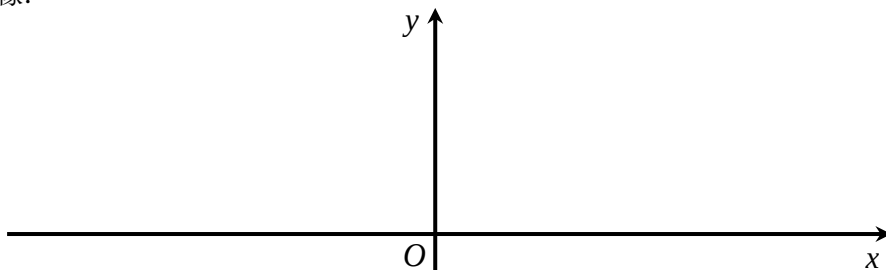


例 4.(1) 利用正切值与余切值的关系, 或者利用余切线, 完成下列问题:

正余函数 $y = \cot x$ 是一个以 _____ 为定义域, _____ 为最小正周期, 在每一个 _____ 内单调递 _____, 且值域为 _____ 的 _____ 函数.

利用 $\cot x = -\tan(\frac{\pi}{2} + x)$, 可知余切函数的图像可以经过正切函数的图像得到, 具体方法

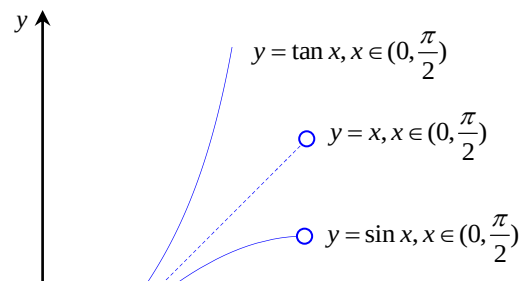
是把正切曲线 _____, 画出余切函数在三个周期内的图像.



(2) 在同一个坐标系中画出 $y = \tan x, y = x, y = \sin x$ 这三个函数在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的图像,

并分析图像的位置关系及公共点的坐标.

(3) 证明: 正切函数 $y = \tan x$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的图像是“下凸”的,



即对于任意 $x_1, x_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$, $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{\tan x_1 + \tan x_2}{2} > \tan(\frac{x_1 + x_2}{2})$

解.(1) $\{x | x \in R, x \neq k\pi, k \in Z\}$, π , $(k\pi, k\pi + \pi), k \in Z$, 减, R , 奇.

向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位, 再关于 x 轴对称

(2)如图, 无公共点,

因为 $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\sin x < x < \tan x$

(3)证: $\frac{\tan x_1 + \tan x_2}{2} - \tan(\frac{x_1 + x_2}{2}) =$

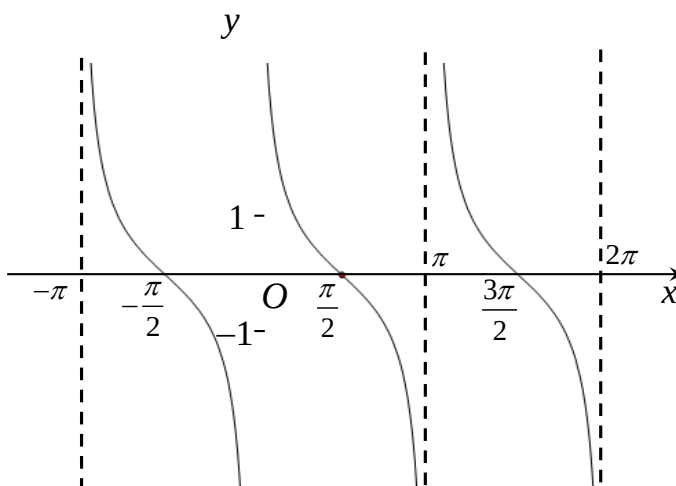
$$\frac{\frac{\sin x_1}{\cos x_1} + \frac{\sin x_2}{\cos x_2}}{2} - \frac{\sin(x_1 + x_2)}{1 + \cos(x_1 + x_2)} =$$

$$\frac{\sin(x_1 + x_2)}{2 \cos x_1 \cos x_2} - \frac{\sin(x_1 + x_2)}{1 + \cos(x_1 + x_2)} =$$

$$\sin(x_1 + x_2) \frac{1 - \cos(x_1 - x_2)}{(2 \cos x_1 \cos x_2)[1 + \cos(x_1 + x_2)]} \quad ①$$

$\because x_1 - x_2 \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$, 因此 $1 - \cos(x_1 - x_2) > 0$, 故 ① > 0

即 $\frac{\tan x_1 + \tan x_2}{2} > \tan(\frac{x_1 + x_2}{2})$ 证毕



巩固提高:

1. 函数 $y = \sqrt{\tan x}$ 的定义域是 $\{x | k\pi \leq x < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\}$

2. 函数 $y = 1 + \tan x$ 的单调递增区间是 $(k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{3\pi}{4}) (k \in Z)$

3. 函数 $y = 2 \tan \pi x + 1$ 的最小正周期是 1

4. 不等式 $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \tan x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ 的解集是 $\{x | k\pi - \frac{\pi}{6} \leq x < k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in Z\}$

5. 函数 $y = \lg \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$ 的奇偶性是 奇函数

6. 函数 $y = \tan(x + \varphi)$ 的图像关于点 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 对称, 则 $\varphi =$

_____ . $\varphi = k\pi - \frac{\pi}{3}$ 或 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{6}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

7. 若 $f(x) = \tan(x + \frac{\pi}{4})$, 则 (D)

(A) $f(-1) > f(0) > f(1)$

(B) $f(0) > f(1) > f(-1)$

(C) $f(1) > f(0) > f(-1)$

(D) $f(0) > f(-1) > f(1)$

8. 已知函数 $y = \tan(2x + \phi)$ 的图象过点 $(\frac{\pi}{12}, 0)$, 则 ϕ 的值可以是 (A)

(A) $-\frac{\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{6}$

(C) $-\frac{\pi}{12}$

(D) $\frac{\pi}{12}$

第十一讲 反三角函数

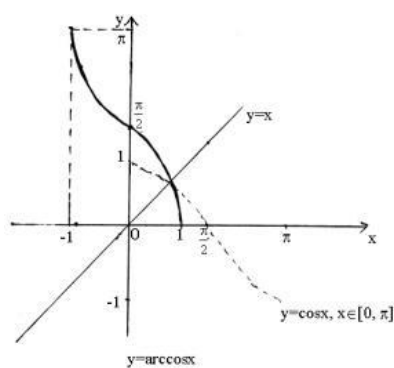
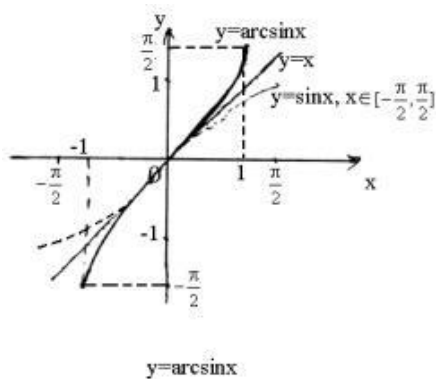
【知识要点】

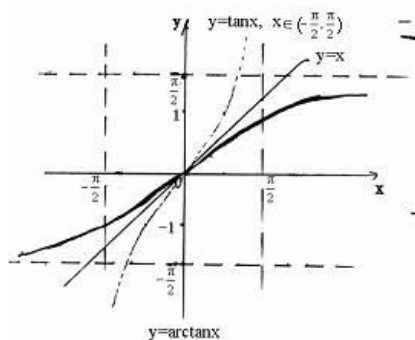
1. $y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的反函数记作 $y = \arcsin x, x \in [-1, 1]$, 称为反正弦函数.

$y = \cos x, x \in [0, \pi]$ 的反函数记作 $y = \arccos x, x \in [-1, 1]$, 称为反余弦函数.

$y = \tan x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的反函数记作 $y = \arctan x, x \in \mathbb{R}$, 称为反正切函数.

2. 反三角函数的图象





3.反三角函数的性质由图象，有

	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\arctan x$
定义域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbf{R}$
值域	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[0, \pi]$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
单调性	在 $[-1, 1]$ 上单增	在 $[-1, 1]$ 上单减	在 $\mathbf{R}$ 上单增
对称性	1° 对称中心 (0, 0) 奇函数 2° 对称轴：无	1° 对称中心 $(0, \frac{\pi}{2})$ 非奇非偶 2° 对称轴：无	1° 对称中心 (0, 0) 奇函数 2° 对称轴：无
周期性	无	无	无

注：1. 三角的反三角运算

$$\arcsin(\sin x) = x \quad (x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) \quad \arccos(\cos x) = x \quad (x \in [0, \pi]) \quad \arctan(\tan x) = x \quad (x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$$

2. 反三角的三角运算

$$\sin(\arcsin x) = x \quad (x \in [-1, 1]) \quad \cos(\arccos x) = x \quad (x \in [-1, 1]) \quad \tan(\arctan x) = x \quad (x \in \mathbf{R})$$

3. x 与 $-x$ 的反三角函数值关系

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x \quad (x \in [-1, 1]) \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x \quad (x \in [-1, 1]) \quad \arctan(-x) = -\arctan x \quad (x \in \mathbf{R})$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (x \in [-1, 1]) \quad \arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} \quad (x \in \mathbf{R})$$

【基础题】

1. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ 的值等于 $\frac{\pi}{4}$

2. $\arctan \sqrt{x}$ 的值域为 _____. $[0, \frac{\pi}{2})$
3. $\arccos(\sin \frac{9\pi}{10})$ 的值等于 _____. $\frac{2\pi}{5}$
4. $\arccos x < -1$, 则 x 的取值范围是 _____. $(-\cos 1, 1]$
5. $\tan \left\{ \arccos \left[\sin \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) \right] \right\} =$ _____. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
6. 函数 $y = -\sin x$ ($\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$) 的反函数 _____. $y = \pi + \arcsin x \quad x \in (-1, 1)$
7. 函数 $y = \arccos(\sin x)$ ($-\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$) 的值域是 _____. $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$
8. 已知等腰三角形的顶角为 $\arccos(-\frac{1}{3})$, 则底角的正切值等于 _____. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【能力题】

例 1. 求下列各式的值:

$$(1) \sin(\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{8}{17}); (2) \cos[\arccos \frac{4}{5} - \arccos(-\frac{5}{13})]$$

$$(3) \arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3} + \arcsin \frac{1}{3}; (4) \arccos(-\frac{11}{14}) - \arccos \frac{1}{7}.$$

$$(1) \frac{77}{85}; (2) \frac{16}{65}$$

$$(3) \frac{\pi}{2}; (4) \frac{\pi}{3}$$

例 2. 解不等式: (1) $\arccos x > \arccos(1-x)$ (2) $\arccos x > \arccos(1-x)$

$$(1) 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

$$(2) \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq 1-x \leq 1 \Rightarrow x \in [0, \frac{1}{2}) \\ x < 1-x \end{cases}$$

例 3. 求下列函数的定义域、值域

$$(1) y = \frac{1}{2} \arcsin(3x-1); (2) y = \frac{1}{2} \arccos(x^2-x)$$

$$(1) y = \frac{1}{2} \arcsin(3x-1); (2) y = \frac{1}{2} \arccos(x^2-x)$$

$$(1) -1 \leq 3x-1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{2}{3}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(3x-1) \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{2} \arcsin(3x-1) \leq \frac{\pi}{4}$$

所以函数的定义域 $[0, \frac{2}{3}]$, 值域 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

$$(2) \because -1 \leq x^2-x \leq 1, \therefore \text{定义域为 } [\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$$

$$\begin{cases} -1 \leq x^2-x \leq 1 \\ x^2-x = (x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq x^2-x \leq 1 \end{cases}$$

所以值域为 $[0, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4}]$.

例 4. 用反正弦形式表示 $\arccos \frac{3}{5} + \arccos \frac{8}{17}$ 。

$$\pi - \arcsin \frac{77}{85}$$

例 5. 求函数 $y = (\arccos x)^2 - 3 \arccos x$ 的最值及相应的 x 的值。

当 $x = \cos \frac{3}{2}$ 时, 函数取得最小值 $-\frac{9}{4}$,

当 $x = -1$ 时, 函数取得最大值 $\pi^2 - 3\pi$ 。

例 6. (1) 求函数 $y = \arccos(x^2-2x)$ 的单调递减区间;

(2) 求函数 $\arctg(x^2-2x)$ 的单调递增区间。

(1) 函数 $y = \arccos u$, $u \in [-1, 1]$ 是减函数,

$$\therefore -1 \leq x^2-2x \leq 1, 1-\sqrt{2} \leq x \leq 1+\sqrt{2}, \text{ 又 } x^2-2x = (x-1)^2+1,$$

$\therefore 1 \leq x \leq 1+\sqrt{2}$ 时, $u = x^2-2x$ 为增函数, 根据复合函数的概念知此时原函数为减函数。

(2) 函数 $y = \arctg u$ 增函数, $u \in \mathbb{R}$, 又 $x^2-2x = (x-1)^2+1$,

$\therefore$ 当 $x \geq 1$ 时, 原函数是增函数。

例 7. 已知 a 、 b 是 $Rt\triangle ABC$ 的两条直角边， c 为斜边，且 $\arcsin \frac{1}{a} + \arcsin \frac{1}{b} = \frac{\pi}{2}$ ，

求证： $\lg c = \lg a + \lg b$ 。

证明：由 $\arcsin \frac{1}{a} + \arcsin \frac{1}{b} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arcsin \frac{1}{a} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{b}$

$$\Rightarrow \sin\left(\arcsin \frac{1}{a}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{b}\right) = \cos\left(\arcsin \frac{1}{b}\right) \Rightarrow \frac{1}{a} = \sqrt{1 - \frac{1}{b^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{c^2}{a^2 b^2} = 1 \Rightarrow c^2 = a^2 b^2 \Rightarrow 2 \lg c = 2(\lg a + \lg b)$$

$\Rightarrow \lg c = \lg a + \lg b$ ，得证。

例 8. 试判断下列函数的定义域、值域、奇偶性、周期性、单调性，并画出大致图像。

(1) $y = \sin(\arcsin x)$ 。 (2) $y = \arcsin(\sin x)$ 。

(1) $y = f(x) = \sin(\arcsin x) = x$ 。

定义域为 $[-1, 1]$ 。值域为 $[-1, 1]$ 。奇函数。

$f(x)$ 不是周期函数，且在 $[-1, 1]$ 上单调递增，如图。

(2) $y = f(x) = \arcsin(\sin x)$ 。

定义域为 R 。值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 。奇函数。

$f(x)$ 是周期函数，周期为 2π 。

下面讨论单调性：

① 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时， $f(x) = \arcsin(\sin x) = x$ ，为增函数。

② 当 $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 时， $f(x) = \arcsin(\sin x) = \arcsin[\sin(\pi - x)] = \pi - x$ ，为减函数。

由函数的周期性，得

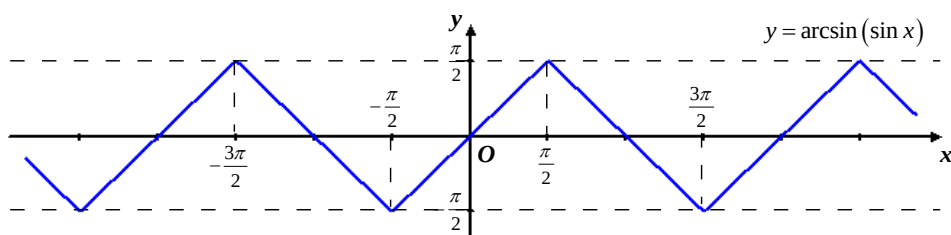
① 区间 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ ($k \in Z$) 为函数 $f(x)$ 的递增区间，此时

$$f(x) = \arcsin(\sin x) = \arcsin[\sin(x - 2k\pi)] = x - 2k\pi, \quad k \in Z。$$

② 区间 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$ ($k \in \mathbb{Z}$) 为函数 $f(x)$ 的递减区间, 此时

$$f(x) = \arcsin(\sin x) = \arcsin[\sin(2k\pi + \pi - x)] = 2k\pi + \pi - x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{所以 } y = \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x - 2k\pi, & x \in \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right] \\ 2k\pi + \pi - x, & x \in \left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}. \text{ 如图.}$$



【巩固提高】

- 函数 $y = \arctan x$ 的定义域是 $\mathbb{R}$ _____, 值域是 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ _____.
- (1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$ _____; (2) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ _____; (3) $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ _____.
- (1) $\sin(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2}$ _____; (2) $\cot[\arcsin(-\frac{1}{2})] = -\sqrt{3}$ _____.
- (3) $\cot(\arctan \frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ _____; (4) $\cos(\arctan \sqrt{3}) = \frac{1}{2}$ _____.
- 若 $\arccos x \geq \frac{2}{3}\pi$, 则 x 的取值范围是 $[-1, -\frac{1}{2}]$ _____.
- 若 $\arctan x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4}$, 则 x 的取值范围是 $\frac{\sqrt{17}-3}{4}$ _____.
- 已知 x_1, x_2 是方程 $x^2 + 3\sqrt{3}x + 4 = 0$ 的两个根, 记 $\alpha = \arctan x_1, \beta = \arctan x_2$, 则 $\alpha + \beta$ 的值为 $-\frac{2\pi}{3}$ _____.
- $\arccos(\cos \pi^2) = 4\pi - \pi^2$ _____.
- 已知 $f(x) = \sin x + \arcsin x$, 若 $f(1-a) + f(1-a^2) < 0$, 则 a 的取值范围为 $(1, \sqrt{2}]$ _____.

9. 下列函数中, 存在反函数的是 (C)。

A. $y = \sin x, x \in [-\pi, 0]$

B. $y = \cos x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

C. $y = \tan x, x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (-\frac{\pi}{2}, 0]$

D. $y = \sin x, x \in [-\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}]$

10. 若 $\arccos x \geq 1$, 则 x 的取值范围是 (D)。

(A) $[-1, 1]$ (B) $[-1, 0]$ (C) $[0, 1]$ (D) $[-1, \cos 1]$

11. 函数 $y = \arctan x + \frac{1}{2} \arcsin x$ 的值域是 (D)

(A) $(-\pi, \pi)$ 。 (B) $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 。 (C) $\left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 。 (D) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 。

12. 设函数 $y = \arctan x$ 的图像沿 x 轴正方向平移 2 个单位后得到图像与图像 C 关于原点对称, 那么图像 C 所对应的函数是 (C)

(A) $y = -\arctan(x-2)$ 。

(B) $y = \arctan(x-2)$ 。

(C) $y = \arctan(x+2)$ 。

(D) $y = \tan(x+2)$ 。

第十二讲：最简三角方程

【知识要点】

1. 若 $\sin x = a$ ($|a| \leq 1$), 则 $x = k\pi + (-1)^k \arcsin a$ ($k \in \mathbb{Z}$)

2. 若 $\cos x = a$ ($|a| \leq 1$), 则 $x = 2k\pi \pm \arccos a$ ($k \in \mathbb{Z}$)

3. 若 $\tan x = a$ ($a \in \mathbb{R}$), 则 $x = k\pi + \arctan a$ ($k \in \mathbb{Z}$)

基础题

1. 方程 $\tan 2x = \sqrt{3}$ 的解为_____。 $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

2. 方程 $\sin 2x = \sin x$ 在 $(-\pi, \pi)$ 的解_____。 $0, \pm \frac{\pi}{3}$

3. 若 $\sin^2 x + 2\sin x - a = 0$ 有解, 则 a 的取值范围_____。

问题等价于: $y = \sin^2 x + 2\sin x$ 与 $y = a$ 有公共点. 所以 $-1 \leq a \leq 3$

4. 若 $0 \leq x < 2\pi$, 则函数 $y = \sin x - \cos x$ 与 x 轴的交点个数_____ . 2 个

5. 方程 $\sin^2 x = \cos^2 x$ 的解集_____. $\{x \mid x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$

6. 方程 $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$ 的解集是_____.

$$\{x \mid k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\}$$

7. 方程 $\cos(\pi \cos x) = 0 (0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2})$ 所有解的和_____ . 和为

$$\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$$

8. 方程 $2^{c^x} = \frac{1}{4} c^{2^x}$ 的解集是_____.

$\{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \mid x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ 9. 方程 $\frac{2\sin x}{\sin 2x} = 1$ 在 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ 内的解集

为_____. 解集为空集 $\emptyset$

10. 已知 $x \in (0, \pi)$, 则方程 $4\pi \sin 2x - 3\arccos(-\frac{1}{2}) = 0$ 的解集_____. $\frac{\pi}{12}$ 或 $\frac{5\pi}{12}$

11. 若方程 $\sqrt{3}\sin x + \cos x = m$ 在 $(0, 2\pi)$ 内有两个相异实根, 则实数 m 的取值范围_____.

数形结合: $m \in (-2, 1) \cup (1, 2)$

12. 直线 $y = \frac{1}{2}$ 与曲线 $y = -\cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 内交于 A, B 两点, 则线段 AB 的中点坐标是_ $(\pi, \frac{1}{2})$ _____.

能力题

例 1. 解下列三角方程

(1) $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 0$

(2) $3\sin \frac{x}{2} + \cos x + 1 = 0$

$$\{x \mid x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\{x \mid x = 2k\pi - (-1)^k \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

(3) $3\sin x - 2\cos x = 0$

(4) $2\sin^2 x - 3\sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$

$$\{x \mid x = k\pi + \arctan \frac{2}{3}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\{x \mid x = k\pi - \arctan \frac{1}{2} \text{ 或 } x = k\pi + \arctan 2, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$(5) 6\sin^2 x - 4\sin 2x = -1$$

$$(6) \sin x \cos x + \sin x + \cos x + 1 = 0$$

$$\{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ 或 } x = k\pi + \arctan \frac{1}{7}, k \in \mathbb{Z}\} \quad \{x \mid x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \text{ 或 } x = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

例 2. 解方程

$$(1) (\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\{x \mid x = \frac{k\pi}{2} - (-1)^k \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$(2) \sqrt{5\cos x + \cos 2x} + \sin x = 0, x \in [0, 2\pi]$$

$$x = 2\pi - \arccos \frac{1}{3}.$$

$$(3) 3\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x = 2$$

$$\{x \mid x = k\pi + \arctan 3 \text{ 或 } x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$$

例 3. 若 $x = \frac{\pi}{3}$ 是方程 $2\cos(x + \alpha) = 1$ 的根, 且 $\alpha \in (0, 2\pi)$, 求 α 的值。

$$\frac{4\pi}{3}$$

例 4. 关于 x 的方程 $\sin x + \sqrt{3}\cos x + a = 0$ 在 $(0, 2\pi)$ 内有两个相异的实数解 α, β , 求实数 a 的取值范围及 $\alpha + \beta$ 的值。

$$\begin{cases} -1 < -\frac{a}{2} < 1 \\ -\frac{a}{2} \neq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow a \in (-2, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, 2)$$

例 5. 就实数 a 的取值范围, 讨论关于 x 的方程 $\cos 2x + 2\sin x + 2a - 3 = 0$ 在 $[0, 2\pi)$ 内解的情况。

- (1) 当 $a - \frac{3}{4} > \frac{9}{4}$ 或 $a - \frac{3}{4} < 0$, 即 $a < \frac{3}{4}$ 或 $a > 3$ 时方程无解;
- (2) 当 $a - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$ 即 $a = 3$ 时, 方程有一解: $x = \frac{3\pi}{2}$;
- (3) 当 $\frac{1}{4} < a - \frac{3}{4} < \frac{9}{4}$ 或 $a - \frac{3}{4} = 0$, 即 $1 < a < 3$ 或 $a = \frac{3}{4}$ 时, 方程有两解;
- (4) 当 $a - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, 即 $a = 1$ 时, 方程有三解: $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$;
- (5) 当 $0 < a - \frac{3}{4} < \frac{1}{4}$, 即 $\frac{3}{4} < a < 1$ 时, 方程有四解。

例 6. 当 $x \in [-\pi, \pi]$ 时, 求实数 m 的取值范围, 使方程 $\sin x - \cos x = m$ (1) 有解;

(2) 有两个不同解; (3) 仅有一解; (4) 有三个不同的解。

(1) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$; (2) $(-\sqrt{2}, 1) \cup (1, \sqrt{2})$;

(3) $m = -\sqrt{2}$ 或 $m = \sqrt{2}$; (4) $m = 1$

巩固提高

- 方程 $\frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = 0$ 的解集为 $\{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$
- 方程 $\cos x + 2\sin x = 0$ 的解集为 $\{x \mid x = k\pi - \arctan \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$
- 方程 $\sin 2x = \cos^2 x, x \in [0, 2\pi]$ 的解的个数为 4
- 方程 $\lg i = nx$ 的解集为 $\{x \mid x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$
- 方程 $\sin x = \alpha$ 的解集为 $\{x \mid x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \text{ 或 } x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\}$
- 方程 $16(\sin^6 x + \cos^6 x) = 10 + 3\sqrt{3}, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 的解为 $x = \frac{\pi}{24}$ 或 $\frac{11\pi}{24}$
- 若关于 x 的方程 $\sin^2 x + \cos x + a = 0$ 有解, 则 a 的取值范围为 $[-\frac{5}{4}, 1]$
- 方程 $\sin x + \cos x = k$, 在 $[0, \pi]$ 上有 2 个解, 则 k 的取值范围是 $1 \leq k < \sqrt{2}$
- 方程 $4\cos^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 3 = 0$ 的解集是 $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}) \cup (\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$

- A. $\{x | x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\}$ B. $\{x | x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$
 C. $\{x | x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\}$ D. $\{x | x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$

10. 设全集 U 为 $\mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $M = \{x | f(x) \neq 0\}$, $N = \{x | g(x) \neq 0\}$

那么集合 $\{x | f(x) \cdot g(x) = 0\}$ 等于 () D

- A. $\complement_U M \cap \complement_U N$ B. $\complement_U M \cup N$ C. $M \cup \complement_U N$ D. $\complement_U M \cup \complement_U N$

11. 方程 $a^2 \sin^2 x + a \sin x - 2 = 0$ 有非空解集的条件是 () B

- A. $|a| \leq 1$ B. $|a| \geq 1$ C. $|a| \geq 2$ D. $a \in \mathbb{R}$

12. 方程 $2\sin 2x = x - 3$ 的解有 () C

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

第十三讲 数列的有关概念

一、知识梳理:

1. 数列的定义: 按一定的次序排列的一列数叫数列。

2. 数列的分类:

(1) 按数列的项数分是有限数列还是无限数列;

(2) 按数列的任意相邻两项之间的大小关系分类:

有递增数列 ($a_{n+1} \geq a_n$); 递减数列 ($a_{n+1} \leq a_n$); 摆动数列; 常数数列 (各项都相等)

3. 数列的通项公式:

如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与 n 之间的函数关系可以用一个公式来表示, 这个公式就叫做

这个数列的通项公式。数列的通项公式 $a_n = f(n)$ 揭示了数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与 n 的函数关系。

4. 数列的递推公式:

如果已知数列 $\{a_n\}$ 的第 1 项 (或前几项), 且任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1} (或前几项) 间的关系可以用一个公式来表示, 则这个公式叫这个数列的递推公式。

递推公式是数列特有的表示法, 它包含两个部分: 一是递推关系, 二是初始条件。两者缺一不可。

5. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 与通项 a_n 的关系:

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，即 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ，那么 S_n 与 a_n 有如下关系：

$$a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2) \end{cases}$$

基础题：

1. (1) 分别写出下列数列的一个通项公式：

② $\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, -\frac{7}{16}, \dots$; $\underline{\hspace{2cm}} a_n = (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{2^n} \underline{\hspace{2cm}}$

③ $\frac{2}{3}, \frac{4}{15}, \frac{6}{35}, \frac{8}{63}, \frac{10}{99}, \dots$; $\underline{\hspace{2cm}} a_n = \frac{2n}{(2n-1)(2n+1)}$

④ $7, 77, 777, 7777, \dots$; $\underline{\hspace{2cm}} a_n = \frac{7}{9}(10^n - 1)$

⑤ $a_1 = 2, a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$; $\underline{\hspace{2cm}} a_n = \frac{n+1}{n}$

(2) 点 $P(f(n), f(n))$ 在函数 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 的图象上，若 $f(1) = 2$ ，则 $f(4) = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $f(n) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$f(4) = \underline{2}$ ， $f(n) = \underline{2}$

2. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，求该数列分别满足下列条件的一个通项公式：

(1) $S_n = 3n^2 + n$; (2) $\log_2(1 + S_n) = n + 1$

(1) $a_n = 6n - 2$ (2) $a_n = \begin{cases} 3 & (n=1) \\ 2^n & (n \geq 2) \end{cases}$

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 1$

(1) 若 $a_{n+1} = a_n + 2$ ，则 $a_n = \underline{2n-1}$; (2) 若 $a_{n+1} = 2a_n$ ，则 $a_n = \underline{2^{n-1}}$

(3) 若 $a_{n+1} = a_n + n + 1$ ，则 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$; (4) 若 $a_{n+1} = 2^n \cdot a_n$ ，则 $a_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

(5) 若 $na_n = (n+1)a_{n+1}$ ，则 $a_n = \frac{1}{n}$

(6) 若 $a_n = 3a_{n-1} + 2$ ($n \geq 2$)，则 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ (7) 若 $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$ ，则 $a_n = \frac{1}{n}$

能力题：

例 1. 设数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数, 且 $a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 = S_n^2$ ($n \in N^+$), 其中 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和

(1) 求证: $a_n^2 = 2S_n - a_n$; (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(1) 证明: 当 $n=1$ 时, $a_1^3 = a_1^2$, 又 $a_1 > 0$, 故 $a_1 = 1$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, 有 } \begin{cases} a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 = S_n^2 \\ a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_{n-1}^3 = S_{n-1}^2 \end{cases}$$

$$\text{两式相减得: } a_n^3 = S_n^2 - S_{n-1}^2 = (S_n + S_{n-1})(S_n - S_{n-1})$$

$$\text{则 } a_n^3 = (2S_n - a_n)a_n \quad \because a_n > 0, \therefore a_n^2 = 2S_n - a_n$$

$$\text{又 } a_1 = 1 \text{ 适合上式, 故 } \forall n \in N^+, a_n^2 = 2S_n - a_n$$

(2) 解: $a_n = n$

例 2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = 2a_n + (-1)^n$ ($n \in N^+$),

(1) 写出数列 $\{a_n\}$ 的前三项 a_1, a_2, a_3 ; (2) 求通项 a_n

解: (1) $a_1 = 1; a_2 = 0; a_3 = 2$

(2) 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n + (-1)^n - 2a_{n-1} - (-1)^{n-1}$

$$\text{则 } a_n = 2a_{n-1} + 2(-1)^{n-1}, \text{ 故有: } \frac{a_n}{2^n} = \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{令 } b_n = \frac{a_n}{2^n} \quad (n \geq 2), \text{ 则}$$

$$b_n - b_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore b_n = (b_n - b_{n-1}) + (b_{n-1} - b_{n-2}) + \cdots + (b_2 - b_1) + b_1$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] - \frac{1}{2}$$

$$\text{则 } a_n = \frac{2}{3} \cdot \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] \cdot 2^n - \frac{1}{2} \cdot 2^n, \text{ 即 } a_n = \frac{1}{6} \cdot 2^n - \frac{2}{3}(-1)^n, \text{ 其中 } n \geq 2$$

$$\text{因为 } a_1 = 1 \text{ 适合上式, 故 } a_n = \frac{1}{6} \cdot 2^n - \frac{2}{3}(-1)^n, \quad n \in N^+$$

例 3. 设函数 $f(x) = \log_2 x - \log_x 2$ ($0 < x < 1$), 数列 $\{a_n\}$ 满足 $f(2^{a_n}) = 2n (n \in \mathbb{N}^+)$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列。

解: (1) 由 $f(2^{a_n}) = 2n (n \in \mathbb{N}^+)$, 得 $a_n - \frac{1}{a_n} = 2n$, 即 $a_n^2 - 2n \cdot a_n - 1 = 0$

故 $a_n = n \pm \sqrt{n^2 + 1}$, 由 $0 < x < 1$, 知 $0 < 2^{a_n} < 1$, 即 $a_n < 0$, 故 $a_n = n - \sqrt{n^2 + 1}$

(2) 由 $a_n = n - \sqrt{n^2 + 1} = \frac{-1}{n + \sqrt{n^2 + 1}}$, 可知 $a_{n+1} > a_n (n \in \mathbb{N}^+)$, 故此数列为递增数列。

或由 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \dots = \frac{n + \sqrt{n^2 + 1}}{(n+1) + \sqrt{(n+1)^2 + 1}} < 1$, 且 $a_n < 0$, 得 $a_{n+1} > a_n$

巩固提高:

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 首项为 $a_1 = 1$, 且 $a_n = 2a_{n-1} + 1$, 则 a_5 为(D)

A. 7 B. 15 C. 30 D. 31

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0 = 1, a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} (n \in \mathbb{N}^+)$, 则当 $n \in \mathbb{N}^+$ 时, $a_n =$ (C)

A. 2^n B. $\frac{1}{2}n(n+1)$ C. 2^{n-1} D. $2^n - 1$

3. 数列的前几项是: $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \dots$, 则此数列的一个通项公式是 $a_n =$ (B)

A. $\frac{n-1}{2n}$ B. $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ C. $\frac{n}{n+1}$ D. $\frac{2n}{n+1}$

4. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 对所有的 $n \geq 2$, 都有 $a_1 a_2 a_3 \dots a_n = n^2$, 则 $a_3 + a_5 =$ (C)

A. $\frac{25}{9}$ B. $\frac{25}{16}$ C. $\frac{61}{16}$ D. $\frac{31}{15}$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = \frac{an}{an+1}$, 其中 a 为正常数, 那么 a_n 与 a_{n+1} 的大小关系是 (A)

A. $a_n < a_{n+1}$ B. $a_n > a_{n+1}$ C. $a_n = a_{n+1}$ D. 与 a 的取值有关

6. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - 2n + 3$, 则此数列的前 3 项依次是: (B)

A. -1, 1, 3 B. 2, 1, 3 C. 6, 1, 3 D. 2, 3, 6

7. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = \log_3(n+1)$, 则 $a_5 =$ (D)

- A. $\log_5 6$ B. $\log_3 5$ C. $\log_3 6$ D. $\log_3 \frac{6}{5}$

8. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 \cdot a_n$ ($n \geq 2$), 而 $a_1 = 1$, 通过计算 a_2, a_3, a_4 猜想 $a_n =$ (B)

- A. $\frac{2}{(n+1)^2}$ B. $\frac{2}{(n+1)n}$ C. $\frac{2}{2^n - 1}$ D. $\frac{2}{2n - 1}$

9. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_n = \frac{a_{n-1}}{1 + 3a_{n-1}}$ ($n \geq 2$), 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是: (A)

- A. $\frac{1}{3n - 2}$ B. $\frac{1}{3n + 2}$ C. $\frac{1}{2n - 3}$ D. $\frac{1}{2n + 3}$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{4n-3} = 1, a_{4n-1} = 0, a_{2n} = a_n, n \in \mathbb{N}^*$, 则 $a_{2009} =$ _____; $a_{2014} =$ _____.

11. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2$ ($n \geq 1$), 则该数列的通项 $a_n =$ _____. $a_n =$ ____ $2n - 1$ _____,

12. 若数列的前 4 项是: $4, -\frac{5}{2}, 2, -\frac{7}{4}, \dots$, 则数列的一个通项公式是 _____. $a_n = (-1)^{n-1} \frac{n+3}{n}$

13. 数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 = 1, a_2 = 1$, 且 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ($n > 2$), 则该数列的前 5 项依次是:

_____ ; 设 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 则数列 $\{b_n\}$ 的前 5 项依次是: _____.

1, 1, 2, 3, 5; 1, 2, $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}$

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, \forall n \in \mathbb{N}^+, a_n > 0$, 且 $(n+1)a_n^2 + a_n a_{n+1} - n a_{n+1}^2 = 0$,

则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n =$ _____. $2n$

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n, a_1 = -\frac{2}{3}, S_n + \frac{1}{S_n} + 2 = a_n$ ($n \geq 2$), 通过计算

S_1, S_2, S_3, S_4

可以猜想 $S_n =$ _____, $S_n = -\frac{n+1}{n+2}$

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = n^2 - 5n - 14$

(1) 求 a_2, a_3, a_4 的值; (2) 22 是否为该数列的项? , 说明理由.

(3) 当 n 为何值时, a_n 有最小值, 最小值是多少?

(4) 当 n 为何值时, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 最小?

(1) $a_2 = -20, a_3 = -20, a_4 = -18$

(2) 由 $a_n = n^2 - 5n - 14 = 22$, 得 $n = 9$ 或 $n = -4$ (舍去), 故 22 是数列的第 9 项。

(3) $\because a_n = n^2 - 5n - 14 = (n - \frac{5}{2})^2 - \frac{81}{4}$, 故当 $n = 2$ 或 $n = 3$ 时, a_n 有最小值 -20

(4) 由 $\begin{cases} a_n \leq 0 \\ a_{n+1} \geq 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} n^2 - 5n - 14 \leq 0 \\ (n+1)^2 - 5(n+1) - 14 \geq 0 \end{cases}$ 解得 $n = 6$ 或 $n = 7$

即当 $n = 6$ 或 $n = 7$ 时, S_n 最小。

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^{n+2}$, (1) 求 $a_6 + a_7 + a_8$ 的值;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的奇数项的和: $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}$

(1) $a_6 + a_7 + a_8 = S_8 - S_5 = [\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^9] - [\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^6] = (\frac{1}{2})^5 - (\frac{1}{2})^8 = \frac{7}{256}$

(2) 当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = \frac{3}{8}$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (\frac{1}{2})^{n+1} - (\frac{1}{2})^{n+2} = (\frac{1}{2})^{n+2}$

$$\begin{aligned} \text{则 } a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} &= \frac{3}{8} + (\frac{1}{2})^5 + (\frac{1}{2})^7 + \cdots + (\frac{1}{2})^{2n+1} = \frac{3}{8} + \frac{(\frac{1}{2})^5 [1 - (\frac{1}{2})^{2(n-1)}]}{1 - (\frac{1}{2})^2} \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1 - (\frac{1}{2})^{2(n-1)}}{24} = \frac{5}{12} - \frac{1}{6} \cdot (\frac{1}{2})^{2n} = \frac{5}{12} - \frac{1}{6} \cdot (\frac{1}{4})^n \end{aligned}$$

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项是 $a_n = (n+2) \cdot (\frac{9}{10})^n (n \in N^+)$, 试问 n 取何值时, a_n 取最大值?

并求此最大值。

$n = 7$ 或 $n = 8$ 时, a_n 取最大值 $\frac{9^8}{10^7}$

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2a_n - 1$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 2$, $b_{n+1} = a_n + b_n$

求 a_n , b_n

解: 由 $a_1 = S_1 = 2a_1 - 1$, 得 $a_1 = 1$;

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2a_{n-1}$, $a_n = 2a_{n-1}$, 则 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2$

故 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列, 则 $a_n = 2^{n-1}$

由 $b_{n+1} = b_n + a_n$, 得 $b_{n+1} - b_n = a_n = 2^{n-1}$

$\therefore b_n = (b_n - b_{n-1}) + (b_{n-1} - b_{n-2}) + \cdots + (b_2 - b_1) + b_1$

$$= 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2^0 + 2 = \frac{1-2^{n-1}}{1-2} + 2 = 2^{n-1} + 1, \text{ 其中 } n \geq 2$$

因为 $b_1 = 2$ 适合上式, 故 $b_n = 2^{n-1} + 1$ ($n \in \mathbb{N}^+$)

第十四讲 等差数列

一、知识梳理:

1、定义:

(1) 等差数列定义: 一般地, 如果一个数列从第 2 项起, 每一项与它的前一项的差等于同一个常数, 那么这个数列就叫等差数列, 这个常数叫做等差数列的公差, 公差通常用字母 d 表示。用递推公式表示为 $a_n - a_{n-1} = d (n \geq 2)$ 或 $a_{n+1} - a_n = d (n \geq 1)$ 。

(2) 等差数列的通项为 $a_n = a_1 + (n-1)d$, 当 $d \neq 0$ 时, a_n 是关于 n 的一次式, 它的图象是一条直线上, 那么 n 为自然数的点的集合。

说明: 等差数列的单调性: $d > 0$ 为递增数列, $d = 0$ 为常数列, $d < 0$ 为递减数列。

(3) 等差中项的概念:

定义: 如果 a, A, b 成等差数列, 那么 A 叫做 a 与 b 的等差中项。

其中 $A = \frac{a+b}{2}$

a, A, b 成等差数列 $\Leftrightarrow A = \frac{a+b}{2}$ 。

(4) 等差数列的前 n 项和公式 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ 。可以整理成 $S_n = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$ 。当 $d \neq 0$ 时是 n 的一个常数项为 0 的二次式。

(5) 等差数列的判定方法:

(1) 定义法: $a_{n+1} - a_n = d$ ($n \in N_+$, d 是常数) $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等差数列;

(2) 中项法: $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ ($n \in N_+$) $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等差数列;

(3) 通项公式法: $a_n = kn + b$ (k, b 是常数) $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等差数列;

2、等差数列的性质:

(1) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 从第 2 项起, 每一项是它相邻二项的等差中项;

(2) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 相隔等距离的项组成的数列是等差数列, 如: $a_1, a_3, a_5, a_7, \dots; a_3, a_8, a_{13}, a_{18}, \dots$;

(3) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 对任意 $m, n \in N_+$, $a_n = a_m + (n-m)d$, $d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$ ($m \neq n$);

(4) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $m, n, p, q \in N_+$ 且 $m+n = p+q$, 则 $a_m + a_n = a_p + a_q$;

3、设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且公差为 d , (I) 若项数为偶数, 设共有 $2n$ 项, 则① $S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} = nd$; ② $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$; (II) 若项数为奇数, 设共有 $2n-1$ 项, 则① $S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} = a_n = a_{\text{中}}$; ② $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{n}{n-1}$ 。

4、(1) $a_1 > 0, d < 0$ 时, S_n 有最大值; $a_1 < 0, d > 0$ 时, S_n 有最小值; (2) S_n 最

值的求法: ① 若已知 S_n , 可用二次函数最值的求法 ($n \in N_+$);

基础题:

1 (1) 求等差数列 8, 5, 2, ... 的第 20 项

(2) -401 是不是等差数列 -5, -9, -13, ... 的项? 如果是, 是第几项?

解: (1) 由 $a_1 = 8, d = 5 - 8 = 2 - 5 = -3, n = 20$,

得 $a_{20} = 8 + (20-1) \times (-3) = -49$.

(2) 由 $a_1 = -5, d = -9 - (-5) = -4$,

得数列通项公式为: $a_n = -5 - 4(n-1)$,

由题意可知, 本题是要回答是否存在正整数 n , 使得 $-401 = -5 - 4(n-1)$

成立, 解之得 $n = 100$, 即 -401 是这个数列的第 100 项.

2 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = pn + q$, 期中 p, q 是常数, 那么这个数列是否一定是等差数列? 若是, 首项和公差分别是什么?

解: $p=0$ 时为常数列; $p \neq 0$ 时, 首项为 $p+q$, 公差为 p

提高题;

例 1 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_5 = 10, a_{12} = 31$, 求 a_1, d, a_{20}, a_n

解: $a_1 = -2, d=3, a_{20} = 55, a_n = 3n-5$

例 2. 解: 设 $\{a_n\}$ 是等差数列

(1) $a_{12} = \underline{15}$. (2) $n = \underline{27}$. (3) $S_9 = \underline{108}$.

(3) 由 $2a_8 - a_{11} = 12$ 及 $2a_8 = a_5 + a_{11}$, 得 $a_5 = 12$, 则 $S_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = 9a_5 = 108$

例 3 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_3 + a_5 = -12, a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 = 80$, 求通项 a_n

$a_n = -3n + 5$

例 4 一个等差数列的前 10 项的和为 100, 前 100 项的和为 10, 求前 110 项的和

-110

例 5 等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n, T_n

(1) 若 $a_n = m, a_m = n$, 求 a_{n+m}, S_{n+m}

(2) 若 $S_n = m, S_m = n (m \neq n)$, 求 S_{n+m}

(3) $\frac{S_n}{T_n} = \frac{7n+1}{4n+27} (n \in N^*)$, 求 $\frac{a_n}{b_n}$

解: (1) $S_{m+n} = \frac{(m+n)(m+n-1)}{2}$;

(2) $-(m+n)$

$$(3) \frac{14n-6}{8n+23}$$

例 6. 已知等差数列的前三项依次为 a , 4 , $3a$, 前 n 项和为 S_n , 且 $S_k = 110$,

(1) 求 a 及 k 的值;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 的通项 $b_n = \frac{S_n}{n}$, 证明数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 并求其前 n 项和 T_n

解: (1) $a = 2$, $k = 10$

$$(2) \text{ 由 (1) } S_n = \frac{n(2+2n)}{2} = n(n+1), \text{ 则 } b_n = \frac{S_n}{n} = n+1,$$

故 $b_{n+1} - b_n = (n+2) - (n+1) = 1$, 即数列 $\{b_n\}$ 是首项为 2, 公差为 1 的等差数列

$$T_n = \frac{n(2+n+1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2}$$

例 7. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 9, a_5 = 21$, 且 $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0 (n \in \mathbf{N}^*)$

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项 a_n ; (2) 令 $b_n = 2^{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n

解: (1) $a_n = a_2 + (n-2)d = 9 + (n-2) \times 4 = 4n+1$

(2) 由 $a_n = 4n+1$, 得 $b_n = 2^{4n+1}$, 则 $\{b_n\}$ 是首项 $b_1 = 2^5$, 公比 $q = 2^4$ 的等比数列。

$$\text{故 } S_n = \frac{2^5(2^{4n}-1)}{2^4-1} = \frac{32(2^{4n}-1)}{15}$$

例 8. 已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = \frac{3}{5}$, $a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$, 数列 $\{b_n\}$, 满足 $b_n = \frac{1}{a_n - 1} (n \in \mathbf{N}^*)$

(1) 求证数列 $\{b_n\}$ 是等差数列; (2) 求数列 $\{a_n\}$ 中的最大项与最小项, 并说明理由;

(3) 求 $S_{n+1} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{n+1}$.

$$\text{解析: (1) } b_n = \frac{1}{a_n - 1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{a_{n-1}} - 1} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} - 1}, \text{ 而 } b_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1} - 1},$$

$$\therefore b_n - b_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} - 1} - \frac{1}{a_{n-1} - 1} = 1. (n \in \mathbf{N}^+)$$

$\therefore \{b_n\}$ 是首项为 $b_1 = \frac{1}{a_1 - 1} = -\frac{5}{2}$, 公差为 1 的等差数列.

(2) 依题意有 $a_n - 1 = \frac{1}{b_n}$, 而 $b_n = -\frac{5}{2} + (n-1) \cdot 1 = n - \frac{7}{2}$, $\therefore a_n = 1 + \frac{2}{2n-7}$.

当 $n \leq 3$ 时, $\frac{3}{5} = a_1 > a_2 > a_3 = -1$; 当 $n \geq 4$ 时, $3 = a_4 > a_5 > a_6 > \cdots > a_n > 1$

故 $\{a_n\}$ 中的最小值为 $a_3 = -1$, 最大值为 $a_4 = 3$

$$(3) S_{n+1} = \frac{(n+1)(-\frac{5}{2} + \frac{2n-5}{2})}{2} = \frac{(n+1)(n-5)}{2}$$

巩固提高:

- 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 + a_5 = 4$, $a_n = 33$, 则 $n =$ (C)
A. 48 B. 49 C. 50 D. 51
- 已知等差数列 $\{a_n\}$ 公差为 2, 若 a_1, a_3, a_4 成等比数列, 则 $a_2 =$ (B)
A. -4 B. -6 C. -8 D. -10
- 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_2 + a_3 = -24$, $a_{18} + a_{19} + a_{20} = 78$, 则此数列前 20 项和为 (B)
A. 160 B. 180 C. 200 D. 220
- 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_2 = -6, a_8 = 6$, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 (B)
A. $S_4 < S_5$ B. $S_4 = S_5$ C. $S_6 < S_5$ D. $S_6 = S_5$
- 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $\frac{a_5}{a_3} = \frac{5}{9}$, 则 $\frac{S_9}{S_5}$ 的值为 (A)
A. 1 B. -1 C. 2 D. $\frac{1}{2}$
- 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 前 n 项和是 S_n , 若 $a_7 = 5, S_7 = 21$, 则 $S_{10} =$ (A)
A. 40 B. 55 C. 35 D. 70
- 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 1, 且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{98} + a_{99} = 99$, 则 $a_3 + a_6 + a_9 + \cdots + a_{96} + a_{99} =$ (D)
A. 16 B. 33 C. 48 D. 66
- 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + 3a_8 + a_{15} = 120$, 则 $3a_9 - a_{11}$ 的值为 (D)
A. 6 B. 12 C. 24 D. 48
- 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 = 3, a_6 = -2$, 则 $a_4 + a_5 + \cdots + a_{10} =$ _____ - 52
- 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_4 = 18 - a_5$, 则 $S_8 =$ _____ 72
- 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 a_7 = -16, a_4 + a_6 = 0$, 求 $\{a_n\}$ 前 n 项和 S_n .

解: 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则

$$\begin{cases} (a_1 + 2d)(a_1 + 6d) = -16 \\ a_1 + 3d + a_1 + 5d = 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} a_1^2 + 8da_1 + 12d^2 = -16 \\ a_1 = -4d \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a_1 = -8, \\ d = 2, \end{cases} \text{或} \quad \begin{cases} a_1 = 8 \\ d = -2 \end{cases}$$

因此 $S_n = -8n + n(n-1) = n(n-9)$, 或 $S_n = 8n - n(n-1) = -n(n-9)$

12. 设 $\{a_n\}$ 是公差 d ($d \neq 0$) 的等差数列, 它的前 10 项和 $S_{10} = 110$ 且 a_1, a_2, a_4 成等比数列

(1) 证明: $a_1 = d$; (2) 求公差 d 的值和数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解: (1) 因 a_1, a_2, a_4 成等比数列, 故 $a_2^2 = a_1 a_4$, 又 $\{a_n\}$ 是等差数列,

$$\text{则 } (a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 3d) \quad \text{化简得 } d^2 = a_1 d, \text{ 因 } d \neq 0, \text{ 所以 } a_1 = d$$

$$(2) \because S_{10} = 10a_1 + \frac{10 \times 9}{2}d = 10a_1 + 45d, \text{ 又 } S_{10} = 110, \text{ 且 } a_1 = d,$$

$$\text{则 } 55d = 110 \therefore d = 2 \quad \text{故 } a_n = 2n$$

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其前 n 项和为 S_n , $a_3 = 7$, $S_4 = 24$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2) 设 p, q 是正整数, 且 $p \neq q$, 证明: $S_{p+q} < \frac{1}{2}(S_{2p} + S_{2q})$.

$$(1) \text{ 解: 设等差数列 } \{a_n\} \text{ 的公差是 } d, \text{ 依题意得, } \begin{cases} a_1 + 2d = 7 \\ 4a_1 + \frac{4 \times 3}{2}d = 24 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 3 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$\therefore \text{数列 } \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = a_1 + (n-1)d = 2n+1.$$

$$(2) \text{ 证明: } \because a_n = 2n+1, \therefore S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = n^2 + 2n.$$

$$\because 2S_{p+q} - (S_{2p} + S_{2q}) = 2[(p+q)^2 + 2(p+q)] - (4p^2 + 4p) - (4q^2 + 4q) = -2(p-q)^2,$$

$$\because p \neq q, \therefore 2S_{p+q} - (S_{2p} + S_{2q}) < 0. \therefore S_{p+q} < \frac{1}{2}(S_{2p} + S_{2q}).$$

14. 已知差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 8, S_{10} = 185$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2) 若从数列 $\{a_n\}$ 中依次取出第 2, 4, 8, ..., 2^n , ... 项, 按原来的顺序排成一个新数列 $\{b_n\}$, 试求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 A_n .

(1) 设等差数列的首项为 a_1 , 公差为 d ,

$$\text{则} \begin{cases} a_1 + d = 8 \\ 10a_1 + 45d = 185 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a_1 = 5 \\ d = 3 \end{cases}, \text{所以 } a_n = 3n + 2$$

$$(2) \text{ 依题设 } b_n = a_{2^n} = 3 \cdot 2^n + 2,$$

$$\text{则 } A_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = (3 \cdot 2^1 + 2) + (3 \cdot 2^2 + 2) + \cdots + (3 \cdot 2^n + 2)$$

$$= 3(2 + 2^2 + \cdots + 2^n) + 2n = 3 \cdot \frac{2(1-2^n)}{1-2} + 2n = 6 \cdot 2^n + 2n - 6$$

15. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 公差 $d > 0$, 且 $a_2 \cdot a_3 = 45$, $a_1 + a_4 = 14$

(1) 求公差 d 的值; (2) 令 $b_n = \frac{S_n}{n+c}$, 若数列 $\{b_n\}$ 也是等差数列, 求非零常数 c 的值;

$$\text{解: (1) 等差数列 } \{a_n\} \text{ 中, } a_2 + a_5 = a_1 + a_4 = 14, \text{ 又 } a_2 a_3 = 45, \text{ 则 } \begin{cases} a_2 = 5 \\ a_3 = 9 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_2 = 9 \\ a_3 = 5 \end{cases}$$

$$\text{因 } d > 0, \text{ 所以 } a_2 < a_3, \text{ 故 } a_2 = 5, a_3 = 9, d = a_3 - a_2 = 4$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } a_1 = 1, S_n = n + \frac{n(n-1)}{2} \times 4 = 2n^2 - n, \therefore b_n = \frac{S_n}{n+c} = \frac{2n^2 - n}{n+c}$$

$$\text{则有 } b_1 = \frac{1}{1+c}, b_2 = \frac{6}{2+c}, b_3 = \frac{15}{3+c}, \text{ 由于数列 } \{b_n\} \text{ 是等差数列}$$

$$\text{所以 } b_1 + b_3 = 2b_2, \text{ 即 } \frac{1}{1+c} + \frac{15}{3+c} = 2 \times \frac{6}{2+c} \text{ 解得 } c = -\frac{1}{2} \text{ 或 } c = 0 \text{ (舍去)}$$

$$\text{则 } b_n = \frac{2n^2 - n}{n - \frac{1}{2}} = 2n, \text{ 易知 } \{b_n\} \text{ 是等差数列, 故 } c = -\frac{1}{2}$$

第十五讲 等比数列

知识点:

一、基本概念与公式:

1、等比数列的定义;

2、等比数列的通项公式:

(1) $a_n = a_1 q^{n-1}$; (2) $a_n = a_m q^{n-m}$.(其中 a_1 为首项、 a_m 为第 m 项, $a_n \neq 0$; $m, n \in N^*$)

3、等比数列的前 n 项和公式: 当 $q=1$ 时, $S_n = n a_1$ (是关于 n 的正比例式);

$$\text{当 } q \neq 1 \text{ 时, } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = K \cdot q^n - K, \quad S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$$

三、有关等比数列的几个特殊结论

1、等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $m+n = p+q (m, n, p, q \in N^*)$, 则 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$

注意: 由 S_n 求 a_n 时应注意什么?

$$n=1 \text{ 时, } a_1 = S_1;$$

$$n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1}.$$

2、等比数列 $\{a_n\}$ 中的任意“等距离”的项构成的数列仍为等比数列.

3、公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 中的任意连续 m 项的和构成的数列 $S_m, S_{2m}-S_m, S_{3m}-S_{2m},$

$S_{4m}-S_{3m}, \dots$ ($S_m \neq 0$) 仍为等比数列, 公比为 q^m .

4、若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 为两等比数列, 则数列 $\{ka_n\}, \{a_n^k\}, \{a_n \cdot b_n\}, \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$

($k \neq 0$, k 为常数) 仍成等比数列.

5、若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则 $\{c^{a_n}\}$ ($c > 0$) 是等比数列.

6、若 $\{b_n\}$ ($b_n > 0$) 为等比数列, 则 $\{\log_c b_n\}$ ($c > 0$ 且 $c \neq 1$) 是等差数列.

7、在等比数列 $\{a_n\}$ 中:

$$(1) \text{ 若项数为 } 2n, \text{ 则 } \frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = q$$

$$(2) \text{ 若项数为 } 2n+1, \text{ 则 } \frac{S_{\text{奇}} - a_1}{S_{\text{偶}}} = q$$

8、数列 $\{a_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列 $\Leftrightarrow$ 数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n = A \cdot q^n - A, (q \neq 1, A \neq 0)$

	等差数列	等比数列
定义	$a_{n+1} - a_n = d$	$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q (q \neq 0)$

递推公式	$a_n = a_{n-1} + d$; $a_n = a_{m-n} + md$	$a_n = a_{n-1}q$; $a_n = a_m q^{n-m}$
通项公式	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 q^{n-1}$ ($a_1, q \neq 0$)
中项	$A = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$ ($n, k \in \mathbb{N}^*, n > k > 0$)	$G = \pm \sqrt{a_{n-k} a_{n+k}}$ ($a_{n-k} a_{n+k} > 0$) ($n, k \in \mathbb{N}^*, n > k > 0$)
前 n 项和	$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$	$S_n = \begin{cases} na_1 (q=1) \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1-a_n q}{1-q} (q \neq 1) \end{cases}$
重要性质	$a_m + a_n = a_p + a_q$ ($m, n, p, q \in \mathbb{N}^*, m+n=p+q$)	$a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$ ($m, n, p, q \in \mathbb{N}^*, m+n=p+q$)

9、等比数列的判定方法

- (1)、 $a_n = a_{n-1} \cdot q$ ($n \geq 2$), q 是不为零的常数, $a_{n-1} \neq 0 \Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等比数列.
- (2)、 $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ ($n \geq 2, a_{n-1}, a_n, a_{n+1} \neq 0$) $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等比数列.
- (3)、 $a_n = c \cdot q^n$ (c, q 均是不为零的常数) $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等比数列.

10、等比数列的前 n 项和的性质

- (1)、若某数列前 n 项和公式为 $S_n = a^{n-1}$ ($a \neq 0, \pm 1$), 则 $\{a_n\}$ 成等比数列.
- (2)、若数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 则 $S_{n+m} = S_n + q^n \cdot S_m$.
- (3)、在等比数列中, 若项数为 $2n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 则 $\frac{S_{偶}}{S_{奇}} = q$.
- (4)、 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 成等比数列.

基础题

1. $\sqrt{13} + \sqrt{2}$ 与 $\sqrt{13} - \sqrt{2}$ 的等比中项是_____.

答案: $\pm \sqrt{11}$

解析: 设 $\sqrt{13} + \sqrt{2}$ 与 $\sqrt{13} - \sqrt{2}$ 的等比中项为 x ,

则 $x^2=11 \Rightarrow x=\pm\sqrt{11}$.

2. 一个等比数列的前三项依次为 $a, 2a+2, 3a+3$. 试问 $-13\frac{1}{2}$ 是否为这个数列中的一项? 如果是, 是它的第几项? 如果不是, 请说明理由.

解: $\because a, 2a+2, 3a+3$ 是等比数列前三项, 仍然构成等比数列,

$$\therefore a(3a+3)=(2a+2)^2,$$

解得 $a=-1$ 或 $a=-4$.

当 $a=-1$ 时, 数列的前三项依次为 $-1, 0, 0$.

与等比数列的定义矛盾, 故将 $a=-1$ 舍去.

当 $a=-4$ 时, 数列的前三项依次为 $-4, -6, -9$.

则公比为 $q=\frac{3}{2}$.

$$\therefore a_n = -4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

$$\text{令 } -4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = -13\frac{1}{2},$$

$$\text{即 } \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3,$$

$$\therefore n-1=3, \text{ 即 } n=4.$$

$\therefore -13\frac{1}{2}$ 是这个数列的第 4 项.

3. 若 a, b, c 成等比数列, 则函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象与 x 轴交点的个数为()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 不能确定

答案: A

解析: 若 a, b, c 成等比数列, 则 $b^2=ac$.

$$\text{故 } \Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 4b^2 = -3b^2.$$

又 $b \neq 0, \therefore \Delta < 0, \therefore$ 选 A.

4. 已知一个等比数列的每项为正数, 且从第三项起的任意一项均等于前两项之和, 则此等比数列的公比为()

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

B. $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$

C. $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$

D. $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$

答案: C

解析: 依题意有 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n (n \in \mathbf{N}^*)$,

$$\therefore a_n q^2 = a_n q + a_n. \text{ 又 } a_n \neq 0,$$

$$\therefore q^2 - q - 1 = 0. \therefore q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

又每项为正, 故 $q > 0$.

$$\therefore q = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

5. 在 $\frac{1}{n}$ 和 $n+1$ 之间插入 n 个正数, 使这 $n+2$ 个正数成等比数列, 则插入的 n 个正数之积为

答案: $(1+\frac{1}{n})^{\frac{n}{2}}$

解析: $n+1 = \frac{1}{n} \cdot q^{n+1}$,

$$a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n+1} = a_1^n \cdot q^{1+2+\dots+n} = (\frac{1}{n} \cdot q^{\frac{n+1}{2}})^n = (1+\frac{1}{n})^{\frac{n}{2}}.$$

6. 三数成等比数列, 积为 27, 和为 13, 求这三个数.

解: 设这三个数为 $\frac{a}{q}$ 、 a 、 aq ,

$$\text{由题可得} \begin{cases} \frac{a}{q} \cdot a \cdot aq = 27 \\ \frac{a}{q} + a + aq = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3, \\ 3q^2 - 10q + 3 = 0. \end{cases}$$

解得 $q=3$ 或 $\frac{1}{3}$.

所以三个数为 1, 3, 9 或 9, 3, 1.

提高题

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_2 \cdot a_8 = 36$, $a_3 + a_7 = 15$, 则公比为()

A. $\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\pm \sqrt{2}$

C. $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\pm \sqrt{2}$, $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

答案: D

解析: $\begin{cases} a_2 \cdot a_8 = 36 \\ a_3 + a_7 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 \cdot a_7 = 36 \\ a_3 + a_7 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 3 \\ a_7 = 12 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_3 = 12 \\ a_7 = 3. \end{cases}$

$$\therefore q = \pm \sqrt{2} \text{ 或 } q = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. 设两个方程 $x^2 - ax + 1 = 0$, $x^2 - bx + 1 = 0$ 的四个根组成以 2 为公比的等比数列, 求 ab 的值.

解: 设以 2 为公比成等比数列的四个根依次为 $m, 2m, 4m, 8m (m \neq 0)$.

$\because$ 两方程的常数项均为 1,

$$\therefore \text{只有} \begin{cases} m \times 8m = 1, \\ 2m \times 4m = 1, \end{cases} \text{ 即 } m^2 = \frac{1}{8}.$$

不妨设 m 、 $8m$ 是方程 $x^2-ax+1=0$ 的两根,
而 $2m$ 、 $4m$ 是方程 $x^2-bx+1=0$ 的两根,

$$\text{则} \begin{cases} a = m + 8m \\ b = 2m + 4m \end{cases} \Rightarrow ab = 9m \times 6m = \frac{27}{4}.$$

3. 已知 $a_1, a_2, \dots, a_8, \dots$ 是各项都大于 0 的等比数列, 公比 $q \neq 1$, 则()

A. $a_1 + a_8 > a_4 + a_5$

B. $a_1 + a_8 < a_4 + a_5$

C. $a_1 + a_8 = a_4 + a_5$

D. 两者大小不定

答案: A

解析: $a_1 + a_8 - a_4 - a_5 = a_1 + a_1 q^7 - a_1 q^3 - a_1 q^4 = a_1 q^4 (q^3 - 1) + a_1 (1 - q^3) = a_1 (q^3 - 1)(q^4 - 1)$.

$\because q > 0, \therefore$ 当 $q > 1$ 时, $a_1 (q^3 - 1)(q^4 - 1) > 0$.

$$\therefore a_1 + a_8 > a_4 + a_5.$$

当 $q < 1$ 时, $a_1 (q^3 - 1)(q^4 - 1) > 0$,

$$\therefore a_1 + a_8 > a_4 + a_5.$$

$$\therefore a_1 + a_8 > a_4 + a_5.$$

4. 在 3 和 9 之间插入两个正数, 使前三个数成等比数列, 后三个数成等差数列, 这两个正数之和为()

A. $\frac{27}{2}$

B. $\frac{45}{4}$

C. $\frac{25}{2}$

D. $\frac{47}{4}$

答案: B

解析: 设插入两数为 a 、 b ,

$$\text{则 } a^2 = 3b, \textcircled{1} 2b = 9 + a, \textcircled{2}$$

$$\text{由 } \textcircled{1} \textcircled{2} \text{ 得 } a = \frac{9}{2}, b = \frac{27}{4} (\because a, b > 0),$$

$$\therefore a + b = \frac{9}{2} + \frac{27}{4} = \frac{45}{4}.$$

5. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = 1, a_{13} \cdot a_{14} \cdot a_{15} \cdot a_{16} = 8$, 则 $a_{41} \cdot a_{42} \cdot a_{43} \cdot a_{44} =$ _____.

答案: 2^{10}

解析: $a_{13} a_{14} a_{15} a_{16} = (a_1 a_2 a_3 a_4) \cdot q^{12}$,

$$\therefore q^{12} = \frac{8}{1} = 8 \Rightarrow q^4 = 2.$$

$$\therefore a_{41} a_{42} a_{43} a_{44} = (a_1 a_2 a_3 a_4) \cdot q^{40} = (q^4)^{10} = 2^{10}.$$

6. $\{a_n\}$ 为公差不为零的等差数列, 且 a_3 、 a_6 、 a_{14} 是一个等比数列 $\{b_n\}$ 的第 6、8、10 项, 则等比数列公比是_____.

答案: $\pm \frac{2}{3} \sqrt{6}$

解析: $\because b_6$ 、 b_8 、 b_{10} 成等比数列且公比 $q' = q^2$,

$$\therefore a_6^2 = a_3 \cdot a_{14},$$

$$\text{即 } (a_3 + 3d)^2 = a_3(a_3 + 11d).$$

$$\therefore d = \frac{5}{9} a_3.$$

$$\therefore b_6 = a_3, b_8 = a_3 + 3d = a_3 + \frac{5}{3} a_3 = \frac{8}{3} a_3.$$

$$\therefore q^2 = \frac{b_8}{b_6} = \frac{\frac{8}{3}a_3}{a_3} = \frac{8}{3}.$$

$$\therefore q = \pm \frac{2}{3} \sqrt{6}.$$

7. 在递减等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_6 = 33$, $a_3 \cdot a_4 = 32$. 设 $T_n = \lg a_1 + \lg a_2 + \cdots + \lg a_n$, 求使 $T_n > 0$ 的 n 的最大取值.

$$\text{解: } \begin{cases} a_1 + a_6 = 33 \\ a_1 \cdot a_6 = a_3 \cdot a_4 = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1, \\ a_6 = 32 \end{cases} \text{ (舍)}, \begin{cases} a_1 = 32, \\ a_6 = 1. \end{cases}$$

$$\therefore q = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore a_n = 32 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{6-n}.$$

$$\therefore T_n = \lg a_1 a_2 \cdots a_n = \lg 2^5 \cdot 2^4 \cdots 2^{6-n} = [5+4+\cdots+(6-n)] \cdot \lg 2$$

$$= \frac{n(11-n)}{2} \cdot \lg 2 > 0. \quad \therefore n \text{ 的最大值为 } 10.$$

8. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 项数为偶数, 且所有奇数项的和为 24, 所有偶数项的和为 48, 则公比 q 等于()

A. 4

B. 2

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{4}$

答案: B

$$\text{解析: } \frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{1}{q} = \frac{24}{48}, \therefore q = 2.$$

9. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, 公比 $q = \frac{1}{2}$ 且 $a_2 + a_4 + \cdots + a_{100} = 30$, 则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} =$ _____.

答案: 90

$$\text{解析: } a_2 + a_4 + \cdots + a_{100} = (a_1 + a_3 + \cdots + a_{99}) \times q,$$

$$\therefore a_1 + a_3 + \cdots + a_{99} = 60.$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{100} = 90.$$

10. 已知等比数列中, $S_{30} = 13S_{10}$, $S_{10} + S_{30} = 140$, 则 $S_{20} =$ _____.

答案: 40

$$\text{解析: 依题意知 } S_{10} = 10, S_{30} = 130,$$

又 S_{10} , $S_{20} - S_{10}$, $S_{30} - S_{20}$ 成等比数列,

$$\therefore (S_{20} - S_{10})^2 = S_{10}(S_{30} - S_{20}).$$

$$\therefore (S_{20} - 10)^2 = 10(130 - S_{20}). \therefore S_{20} = 40.$$

11. 已知一个等比数列首项为 1, 项数是偶数, 其奇数项之和为 85, 偶数项之和为 170, 求这个数列的公比和项数.

$$\text{解: 设该等比数列的公比为 } q, \text{ 项数为 } 2n, \text{ 则有 } S_{\text{偶}} = q \cdot S_{\text{奇}}, \therefore q = \frac{170}{85} = 2.$$

$$\text{又 } S_{2n} = S_{\text{偶}} + S_{\text{奇}} = \frac{a_1(1 - q^{2n})}{1 - q} = 85 + 170,$$

$$\therefore 2^{2n}-1=255. \therefore 2n=8.$$

故这个数列的公比为 2, 项数为 8.

12. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_6 : S_3 = 1 : 2$, 则 $S_9 : S_3 =$ _____.

答案: 3 : 4

解析: 方法一:
$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}} = 1+q^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow q^3 = -\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \frac{S_9}{S_3} = \frac{\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}} = 1+q^3+q^6 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

方法二: $\because S_3, S_6-S_3, S_9-S_6$ 成等比数列,

$$\therefore (S_6-S_3)^2 = S_3 \cdot (S_9-S_6).$$

$$\text{又 } S_6 = \frac{1}{2} S_3, \therefore 3S_3 = 4S_9, S_9 : S_3 = 3 : 4.$$

13. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 且 $S_1=3$, 若对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 都有 $S_n = 2a_n - 3n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的首项及递推关系式 $a_{n+1} = f(a_n)$;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

解: (1) 令 $n=1, S_1 = 2a_1 - 3, \therefore a_1 = 3$.

$$\text{又 } S_{n+1} = 2a_{n+1} - 3(n+1), S_n = 2a_n - 3n,$$

$$\text{两式相减得 } a_{n+1} = 2a_n - 3,$$

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n + 3.$$

$$(2) a_{n+1} = 2a_n + 3 \Rightarrow a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3), \text{ 即 } \frac{a_{n+1} + 3}{a_n + 3} = 2.$$

$\therefore \{a_n + 3\}$ 是公比为 2 的等比数列, 其首项为 $a_1 + 3 = 6$.

$$\therefore a_n + 3 = (a_1 + 3) \cdot 2^{n-1} = 6 \cdot 2^{n-1}.$$

$$\therefore a_n = 6 \cdot 2^{n-1} - 3.$$

$$(3) S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$= (6 \cdot 2^0 - 3) + (6 \cdot 2^1 - 3) + (6 \cdot 2^2 - 3) + \cdots + (6 \cdot 2^{n-1} - 3)$$

$$= (6 \cdot 2^0 + 6 \cdot 2^1 + 6 \cdot 2^2 + \cdots + 6 \cdot 2^{n-1}) - (3 + 3 + \cdots + 3)$$

$$= 6(2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) - 3n$$

$$= 6 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} - 3n = 6 \cdot 2^n - 3n - 6.$$

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比大于 1 的等比数列, 且 $a_{10}^2 = a_{15}, S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, T_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$,

求满足 $S_n > T_n$ 的最小正整数 n .

解: 设数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公比为 q , 根据题意, 得 $(a_1 q^9)^2 = a_1 q^{14}$,

$$\text{即 } a_1^2 q^{18} = a_1 q^{14}, a_1 q^4 = 1, a_1 = \frac{1}{q^4}.$$

因为 $q > 1$, 所以 $0 < a_1 < 1$. 从而 $a_n > 0$,

$$\text{又 } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, T_n = \frac{\frac{1}{a_1}(q^n-1)}{q^n - q^{n-1}} = \frac{1}{a_1^2 q^{n-1}} \cdot \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \text{即 } T_n = \frac{1}{a_1^2 q^{n-1}} S_n.$$

$$\text{因为 } S_n > T_n > 0, \text{ 所以 } \frac{S_n}{T_n} = a_1^2 q^{n-1} > 1, q^{n-1} > \frac{1}{a_1^2} = q^8.$$

又 $q > 1$, 故有 $n-1 > 8, n > 9$.

所以满足 $S_n > T_n$ 的最小正整数 $n=10$.

巩固提高:

1. 公比为 $\sqrt[3]{2}$ 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数, 且 $a_3 a_{11} = 16$, 则 $\log_2 a_{16} =$ ()

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

【答案】 B

【解析】 $\because a_3 a_{11} = 16, \therefore a_7^2 = 16, \because a_n > 0 \therefore a_7 = 4, \therefore a_{16} = a_7 \times q^9 = 32, \therefore$

$$\log_2 a_{16} = 5.$$

2. 已知为等比数列, 下面结论种正确的是 ()

- A. $a_1 + a_3 \geq 2a_2$ B. $a_1^2 + a_3^2 \geq 2a_2^2$
C. 若 $a_1 = a_3$, 则 $a_1 = a_2$ D. 若 $a_3 > a_1$, 则 $a_4 > a_2$

【答案】 B

【解析】 当 $a_1 < 0, q < 0$ 时, 可知 $a_1 < 0, a_3 < 0, a_2 > 0$, $\therefore$ A 选项错误;

当 $q = -1$ 时, C 选项错误;

当 $q < 0$ 时, $a_3 > a_2 \Rightarrow a_3 q < a_1 q \Rightarrow a_4 < a_2$, 与 D 选项矛盾.

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 2, 公比为 2, 则 $\frac{a_{a_{n+1}}}{a_{a_1} \cdot a_{a_2} \cdot a_{a_3} \cdots a_{a_n}} =$ _____.

【答案】 4

【解析】 $\because$ 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = q = 2, \therefore a_n = 2^n$,

$$\frac{a_{a_{n+1}}}{a_{a_1} \cdot a_{a_2} \cdot a_{a_3} \cdots a_{a_n}} = \frac{a_{2^{n+1}}}{a_2 \cdot a_{2^2} \cdot a_{2^3} \cdots a_{2^n}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2^{2^{n+1}}}{2^{2^1} \cdot 2^{2^2} \cdot 2^{2^3} \cdots 2^{2^n}} = \frac{2^{2^{n+1}}}{2^{2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n}} = \frac{2^{2^{n+1}}}{2^{\frac{2(1-2^n)}{1-2}}} \\
 &= \frac{2^{2^{n+1}}}{2^{\frac{2(1-2^n)}{1-2}}} = \frac{2^{2^{n+1}}}{2^{(2^{n+1}-2)}} = \frac{2^{2^{n+1}}}{2^{2^{n+1}-2}} = 4.
 \end{aligned}$$

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 2$, $a_5 = 128$.

(1) 求通项 a_n ;

(2) 若 $b_n = \log_2 a_n$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求满足不等式 $S_n < 2012$ 的 n 的最大值.

【解析】(1) $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, $a_2 = 2$, $a_5 = 128$,

$$\therefore \begin{cases} a_1 q = 2 \\ a_1 q^4 = 128 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ q = 4 \end{cases},$$

$$\therefore a_n = a_1 q^{n-1} = \frac{1}{2} \times 4^{n-1} = 2^{2n-3}.$$

$$(2) \because a_n = 2^{2n-3}, \therefore b_n = \log_2 a_n = \log_2 2^{2n-3} = 2n-3,$$

$$\text{又 } \because b_n - b_{n-1} = (2n-3) - [2(n-1)-3] = 2,$$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是一个以 -1 为首项, 2 为公差的等差数列.

$$\therefore S_n = -n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 - 2n,$$

$$\because S_n < 2012, \text{ 即 } n^2 - 2n < 2012, \therefore n^2 - 2n - 2012 < 0$$

$$\therefore 1 - \sqrt{2013} < n < 1 + \sqrt{2013},$$

经过估算, 得到 n 的最大值为 45 .

5. 成等差数列的三个正数的和等于 15 , 并且这三个数分别加上 $2, 5, 13$ 后成为等比数列 $\{b_n\}$

中的 b_1, b_2, b_3 .

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

求证：数列 $\left\{S_n + \frac{5}{4}\right\}$ 是等比数列.

【解析】(1) 设成等差数列的三个正数分别为 $a-d, a, a+d$.

$$\therefore a-d+a+a+d=15, \text{ 解得 } a=5.$$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 中的 b_1, b_2, b_3 依次为 $7-d, 10, 18+d$.

依题意, 有 $(7-d)(18+d)=100$,

解得 $d=2$ 或 $d=-13$ (舍去).

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 的第三项是 5, 公比为 2,

$$\because b_3 = b_1 \cdot q^2, \therefore 5 = 4b_1, \text{ 即 } b_1 = \frac{5}{4}.$$

$$\therefore b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = \frac{5}{4} \cdot 2^{n-1} = 5 \cdot 2^{n-3}.$$

$$(2) \because S_n = \frac{\frac{5}{4}(1-2^n)}{1-2} = 5 \cdot 2^{n-2} - \frac{5}{4},$$

$$\therefore S_n + \frac{5}{4} = 5 \cdot 2^{n-2}.$$

$$\therefore \frac{S_{n+1} + \frac{5}{4}}{S_n + \frac{5}{4}} = \frac{5 \cdot 2^{n-1}}{5 \cdot 2^{n-2}} = 2.$$

$$\because S_1 + \frac{5}{4} = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{5}{2} \neq 0,$$

$\therefore$ 数列 $\left\{S_n + \frac{5}{4}\right\}$ 是以 $\frac{5}{2}$ 为首项,

公比为 2 的等比数列.